# Programme de colle - semaine du 30 Septembre 2019

*Note aux colleurs : Merci de commencer la colle en donnant une ou deux questions de l'un des exercices faits en classe.*
*Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.*
*Merci de tester la connaissance du cours à travers son application dans les exercices et de favoriser la compréhension du cours au "par coeur".*

**Liste des exercices exigibles**

**Exercice 1.**

Justifier que les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels :

— $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) | M - {}^tM = I_5\}$

— $E_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\right\}$

— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] | deg(P) = 3\}$

**Exercice 2.** : **espaces implicites**

Pour chacun des ensembles suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.

— On pose $X$ le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$E_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ AX = 0\}$

— On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
$E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ ; BX = 4X\}$

— $E_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ , \ P(0) = P'(0) = 0\}$

— $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ , \ 2P(1 - X) = XP'(X)\}$

**Exercice 3.** : **espaces explicites**

Pour chacun des ensembles suivants, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que c'est un espace vectoriel.
2. Déterminer sa dimension.

— L'ensemble $E_1$ des polynômes de la forme $P(X) = aX^3 + bX^2 - aX + b$, avec $a$, et $b$ des réels.

— L'ensemble $E_2$ des matrices $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a + 2c & b - 2c \\ -b + 2c & a + 2c \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

— L'ensemble $E_3$ des triplets de réels de la forme $(a + 3b + 4c + 2d, 2a - b + c - 3d, -a - 2b + c + 3d)$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

**Exercice 4.**

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 2)$ et $\vec{v}_4 = (1, -1, 2, 0)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.
2. Soient les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 2, 1, -1)$ et $\vec{u}_4 = (4, 2, 2, 1)$.
Vérifier que $\vec{u}_4 \in Vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Quel est le rang de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ ?

**Exercice 5.**
Soit E un ev muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{j} - \vec{k}$. Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une autre base de E.
2. Déterminer la matrice $U$ des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $B$. Donner la matrice $P$ de passage de $B$ à $B'$ et vérifier (autrement que ci-dessus) que $B'$ est une base de $E$.
3. Déterminer la matrice de passage de $B'$ à $B$ et en déduire l'expression des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

**Exercice 6.**
Soient $\vec{u} = (-1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$ et $\vec{w} = (1, 0, m)$. Déterminer $m$ pour que $\vec{w} \in Vect(\vec{u}, \vec{v})$.
Quel est le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ?

**Exercice 7.**
Déterminer les réels $a$ pour lesquels la famille $\{(2a, a-1), (a-3, a+1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer alors les coordonnées du vecteur $(a, a+1)$ dans cette base.

**Exercice 8.**
Soit E espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose :$P_0(X) = (1+X)^3$ , $P_1(X) = X(1+X)^2$ , $P_2(X) = X^2(1+X)$ ,$P_3(X) = X^3$ . On note $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

1. Rappeler la base canonique de E, que l'on notera $\mathcal{B}$. Donner la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer de deux manières que $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $Q(X) = 3X^3 + X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de $Q$ dans la base $(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

**Exercice 9.**
Démontrer que dans l'ev $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{u} = (2, 3, -1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -2)$ d'une part et les vecteurs $\vec{u'} = (3, 7, 0)$ et $\vec{v'} = (5, 0, -7)$ d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

**Exercice 10.**
On considère l'application $f : [0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t$ de $[0; +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

## Partie I : Étude de la fonction $f$

1. Montrer que $f$ est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Justifier que $f$ est classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout $t$ de $]0; +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau de variations de $f$. On précisera la limite de $f$ en $+\infty$.
4. On note $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Montrer que $C$ admet une (demi-) tangente en $O$ et préciser celle-ci.
   (b) Montrer que $C$ admet un point d'inflexion et un seul, noté $I$, et préciser les coordonnées de $I$.
   (c) Tracer l'allure de $C$.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

### Partie II : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.)
12. Compléter le programme en Scilab suivant qui calcule et affiche un entier naturel $N$ tel que $1-u_N < 10^{-4}$ :

```
function y=f(x)
   if ...........then
               y=0
   else
               y= x^2-x*log(x)
   end
endfunction

N=0
u=1/2
while (1-u) >= 10^(-4) do
          u=................
          N=................
end
disp(N)
```

*On fera obligatoirement appel à la fonction* `f` *pour remplir le deuxième blanc.*

# 1 Variables aléatoires : partie I. du TD "révisions : probabilités discrètes"

- Savoir traduire un évènement, le décomposer en union d'évènements 2 à 2 incompatibles et calculer la probabilité en énonçant et/ou justifiant les différentes formules utilisées (probabilité d'une union puis proba des intersections d'événements élémentaires par formule des probabilités composées).
- Loi d'une variable aléatoire $X$.
- Calcul de $P(X \leq k)$ ; $P(X \geq k)$.
- espérance de $X$. Existence. Savoir identifier la bonne méthode pour calculer une espérance parmi : la définition, la linéarité de l'espérance et le théorème de transfert.
- Variance : définition, théorème de Koenig-Huygens et propriétés.
- Loi de $Y = f(X)$.
- Calculs des probabilités d'une union (formule du crible dans le cas de 2 ou trois événements), calculs de probabilités d'une intersection.

# 2 Espaces vectoriels

## 2.1 Structure d'espace vectoriel

- Les espaces vectoriels fondamentaux : définition, élément neutre, base canonique et dimension de l'espace.

- Notion de combinaison linéaire : définition et stabilité par combinaisons linéaire d'un espace vectoriel.

- Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisation des s.e.v. Utilisation de la caractérisation pour montrer qu'un espace implicite est un espace vectoriel.

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille : utilisation pour montrer qu'un espace explicite est un espace vectoriel.

## 2.2 Familles d'un espace vectoriel

- Famille génératrice d'un espace vectoriel : savoir expliciter un ensemble et le mettre sous la forme de sous-espace vectoriel engendré pour trouver une famille génératrice de l'ensemble.

- Famille libre : définition, cas particulier d'une famille de 1 ou 2 vecteurs, caractérisation des familles liées.

- Base d'un espace vectoriel : définition, propriété de décomposition unique de tout vecteur dans une base. Coordonnées d'un vecteur dans une base.

## 2.3 Dimension finie

- Définition de la dimension, nombre de vecteurs dans une base d'un espace de dimension $n$, nombre de vecteurs d'une famille libre dans un espace de dimension $n$, nombre de vecteurs d'une famille génératrice d'un espace de dimension $n$.

- caractérisation des bases lorsque l'on connait la dimension de l'ensemble ( caractérisation des bases en dimension finie ) : utilisation de cette caractérisation pour prouver qu'une famille est une base d'un espace de dimension connue.

- Propriétés des sous-espaces vectoriels en dimension finie.

## 2.4 Matrice des coordonnées dans une base

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, caractérisation des bases par une matrice.

- Matrice de passage, formule de changement de base.

## 2.5 Rang

- Rang d'une famille de vecteurs : définition.
- Rang d'une matrice. Propriétés.