# Programme de colle - semaine du 11 Novembre 2019

*Note aux colleurs : Merci de commencer la colle en donnant une ou deux questions de l'un des exercices faits en classe. Merci de demander également un développement limité usuel d'ordre 2.*
*Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.*
*Merci de tester la connaissance du cours à travers son application dans les exercices et de favoriser la compréhension du cours au "par coeur".*

**Liste des exercices exigibles**

**Exercice 1.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f$.

**Exercice 2.**

On définit la fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-e^{-t}} \text{ si } t \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $[0; +\infty[$.
4. Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\psi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$.
5. Démontrer que $\varphi$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $J$ ; $J$ étant un ensemble à déterminer.

**Exercice 3.**

Soit $g$ la fonction définie sur $]-1; 1[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $g$.
2. En déduire que $g$ est continue et dérivable en 0 et préciser $g'(0)$ .
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de $C_g$ et étudier la position locale de $C_g$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

**Exercice 4.**
Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que $f$ est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0.
2. (a) A l'aide du développement limité de $e^u$ lorsque $u$ est au voisinage de 0, et d'un changement de variable approprié, montrer que :
$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + o_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$
   (b) En déduire qu'au voisinage de $\pm\infty$, la courbe $C_f$ de $f$ admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation et déterminer la position relative de $C_f$ par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

**Exercice 5.**
Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :
$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-2n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4k^2-3k-1}{4^{k-2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+1}{n!},$$
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}7^n}{n!}$$

**Exercice 6.**
Déterminer la nature des séries suivantes :
$$\sum_{k\geq 2} \frac{1}{3^k+1}, \quad \sum_{k\geq 3} \frac{1}{\sqrt{k}-1}, \quad \sum_{n\geq 3} \frac{e^{-2n}+n}{n^{\frac{3}{2}}+(-1)^n}, \quad \sum_{n\geq 6} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}, \quad \sum_{n\geq 1} e^{-n^2},$$
$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n^4 \ln(n)}{e^{2n}}, \quad \sum_{n\geq 4} \frac{1}{n\sqrt{n}\ln(n)}$$

**Exercice 7.**
Soit $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$.

1. Justifier que $f$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On considère à présent pour tout $n$ entier naturel non nul l'équation :
$$f(x) = \frac{1}{n^2} \qquad (E_n)$$
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n)$ a une unique solution strictement positive. On la notera $\alpha_n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \geq \frac{1}{n^2}$.
   (c) Montrer que la suite $\alpha$ est décroissante et convergente.
   (d) Déterminer la limite de la suite $\alpha$ puis montrer que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$

**Exercice 8.**
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction $f_n$ par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$, notée $x_n$.
2. Calculer $x_2$.
3. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$ et montrer sa convergence.
5. Justifier que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
6. Déterminer la limite de $x_n^n$, puis montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$

**Exercice 9.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle $f_n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif $x_n$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > -1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.
5. Calculer la limite $\ell$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. La série de terme général $y_n = x_n - \ell$ est-elle convergente ?

**Exercice 10.**
Soit $f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$. On rappelle que l'on sait d'après l'exercice 1 que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in ]0;+\infty[$ et, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$. .
2. On suppose dans cette question : $u_0 \in ]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) En déduire que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
3. On suppose, dans cette question : $u_0 \in ]0;e-1[$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 11.**
Etude de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + e - 1$ pour différentes valeurs de $u_0$.

1. On introduit la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(x)+e-1$ et la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x)-x$.
   (a) Etudier les variations de $f$.
   (b) Etudier le signe de $g$. On pourra introduire un réel $\alpha$ implicite.
2. On étudie ici la suite $u$ dans le cas où $u_0 > e$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et $u_n > e$.
   (b) En déduire que $u$ est décroissante et convergente.
   (c) Déterminer la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
3. On étudie ici le cas où $u_0 = 1$
   (a) Montrer que pour tout entier $n$, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$
   (b) En déduire que $u$ est convergente et déterminer sa limite.
4. On étudie ici la suite $u$ dans le cas où $0 < u_0 < \alpha$. ($\alpha$ défini au **1.b)**). On se propose de démontrer *par l'absurde* qu'à partir d'un certain rang, la suite $u$ n'est plus définie.
   On suppose pour celà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (a) Montrer que $u_1 < u_0$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n < \alpha$.
   (b) Montrer que la limite $\ell$ de $u$ ne peut pas être strictement positive.
   (c) Montrer que $\ell = 0$ et conclure à l'aide de la limite de $f$ en 0.

# 1 Informatique

TP1 : statistiques descriptives univariées :
- Savoir simuler des lois usuelles avec `rand` ou `grand`,
- Savoir calculer des fréquences avec `sum(X==a)/length(X)` ou un tableau de fréquences à l'aide de `tabul` et des fréquences cumulées avec `cumsum`

TP2 : savoir simuler des chaînes de Markov

## 2 Etude locale de fonctions

- **Négligeabilité** : définition. Théorème de comparaison des fonctions puissances et théorème des croissances comparées en terme de négligeabilité. Règles de calculs sur les "petits o" et propriété fondamentales des "petits o".

- **Equivalence** : définition. Règles de calculs sur les équivalents. Quelles sont les deux théorèmes d'utilisation des équivalents ?

- **Développements limités d'ordre 1** : définition, condition suffisante pour admettre un DL d'ordre 1 en $x_0$ et formule de Taylor-Young.

- **Développements limités d'ordre 2** : définition et formule de Taylor-Young.

- **Les développements limités usuels** : les connaître et savoir les retrouver par formule de Taylor-Young.

- Calculs et applications des développements limités : Calculs d'équivalents et de limites. Etude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction en un point. Calculs de développements limités simples pour trouver la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en un point ou par rapport à une asymptote.

## 3 Séries numériques

• Définition de la convergence de la série de terme général $u_n$.
• Connaître les conditions de convergence et la somme des séries usuelles : géométriques et exponentielle. Savoir calculer la somme d'une série : soit en faisant apparaître des séries usuelles, soit en reconnaissant un télescopage.
• Connaître les séries de Riemann et la condition de leur convergence.
• Savoir répondre à la question "prouver qu'une série converge ou diverge" (i.e. déterminer la nature d'une série, sans calculer sa somme) : on vérifie s'il y a divergence grossière, sinon théorèmes de comparaison sur la valeur absolue du terme général. Conclusion par théorème de la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

## Suites implicites

Etude des suites implicites : cf exos 1,2 et 3 du TD 4.

## Suites récurrentes d'ordre 1

Méthodes d'étude des suites récurrentes d'ordre 1 :
• **Méthode 1 :** Prouver dans cet ordre les 4 points suivants :

1. Justifier l'existence en trouvant un intervalle $J$ stable par $f$ contenant $u_0$ (si besoin à l'aide des variations de $f$) puis prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

2. Etudier ses variations de $(u_n)$ :
   - Soit en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ : directement ou bien à l'aide de l'étude du signe de $g(x) = f(x) - x$
   - Soit en comparant $u_1$ et $u_0$ et en prouvant les variations par récurrence (si on a prouvé au préalable que $f$ est croissante).

3. prouver qu'elle converge par théorème de la limite monotone.

4. Trouver les valeurs POSSIBLES de la limite par passage à la limite dans les inégalités puis passage à la limite dans l'égalité de récurrence : théorème du point fixe .

En déduire la limite.

Exercices : -pour s'entraîner à l'étude directe de la suite : exos 3 et 4 du TD3
- et pour s'entraîner à l'utilisation de l'étude de la fonction $f$ et de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ : exercices partie II du TD 4 .

• **Méthode 2 :** Par utilisation de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $f$ (cf DM1 et DM3 et exercice 8 du TD4).