Programme de colle - semaine du 25 Novembre 2019

Note aux colleurs : Cette colle commencera par des questions de cours : énoncer plusieurs définitions et théorèmes étoilés $(*)$ *+ en donner la preuve pour les propriétés signalées par* $(\spadesuit)$.

Continuer ensuite par une ou deux questions des exercices exigibles.

Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.

En ce qui concerne les applications linéaires, le cours doit être su ! En revanche, peu d'exercices auront été traités en classe. Merci d'être indulgents sur les exercices.

Liste des exercices exigibles

Exercice 1.
Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On considère à présent pour tout n entier naturel non nul l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{n^2} \qquad (E_n)$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) a une unique solution strictement positive. On la notera α_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \geq \frac{1}{n^2}$.
   (c) Montrer que la suite α est décroissante et convergente.
   (d) Déterminer la limite de la suite α puis montrer que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 2.
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$, notée x_n.
2. Calculer x_2.
3. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$ et montrer sa convergence.
5. Justifier que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
6. Déterminer la limite de x_n^n, puis montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > -1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.
5. Calculer la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. La série de terme général $y_n = x_n - \ell$ est-elle convergente ?

Exercice 4.
Soit $f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$. On rappelle que l'on sait d'après l'exercice 1 que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$. .
2. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.
Etude de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + e - 1$ pour différentes valeurs de u_0.

1. On introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)+e-1$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x)-x$.
   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Etudier le signe de g. On pourra introduire un réel α implicite.
2. On étudie ici la suite u dans le cas où $u_0 > e$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > e$.
   (b) En déduire que u est décroissante et convergente.
   (c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. On étudie ici le cas où $u_0 = 1$
   (a) Montrer que pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$
   (b) En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.
4. On étudie ici la suite u dans le cas où $0 < u_0 < \alpha$. (α défini au **1.b)**). On se propose de démontrer *par l'absurde* qu'à partir d'un certain rang, la suite u n'est plus définie.
   On suppose pour celà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   (a) Montrer que $u_1 < u_0$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n < \alpha$.
   (b) Montrer que la limite ℓ de u ne peut pas être strictement positive.
   (c) Montrer que $\ell = 0$ et conclure à l'aide de la limite de f en 0.

Exercice 6.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5+4u_n}$.

1. **Existence des termes de la suite** : Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 5$.
2. **Limites finies possibles :** Déterminer la seule limite finie possible de (u_n).
3. **Convergence :** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{2}{3}|u_n - 5|$. En déduire que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 5| \leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Conclure.

Exercice 7.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x-y, 3x+y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 8.

1. Vérifier que la famille $((1,1),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Décomposer (x,y) dans cette base.

   On suppose qu'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,1) = (1,0,3)$ et $f(0,1) = (-2,-1,1)$.
2. Déterminer une base de l'image de f.
3. Calculer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Déterminer la dimension du noyau de f.
5. f est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
6. Le vecteur $(1,1,1)$ admet-il un antécédent par f ?

Exercice 9.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM - MA$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f : on en donnera une base et la dimension.
3. Déterminer l'image de f : on en donnera une base et la dimension.
4. Donner la matrice B de f dans la base canonique, justifier de plusieurs façons de f n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et retrouver son noyau par calcul matriciel.

Exercice 10.
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(1), P'(1), P(0))$.

1. Calculer l'image par f de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que f est un isomorphisme.
4. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 11.
Soit u l'application linéaire qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(2x+1) - 2xP'(1-x)$$

1. Démontrer que u est linéaire. Dorénavant, on note f la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau de f : on en donnera une base et la dimension.
4. Déterminer l'image de f : on en donnera une base et la dimension.
5. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 12.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe (x',y',z') où $\begin{cases} x' = x - 2y - \frac{4}{3}z \\ y' = -2x + 4y + \frac{8}{3}z \\ z' = 3x - 6y - 4z \end{cases}$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On note $e'_1 = (2,1,0)$, $e'_2 = (4,0,3)$ et $e'_3 = (1,-2,3)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Utiliser A' pour :
   (a) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
   (b) Déterminer si $f - Id$ est un isomorphisme. Que vaut $Ker(f - Id)$, $Im(f - Id)$?
   (c) Déterminer $f \circ f$

Exercice 13.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1. On note $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{k}$.
   Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E notée $\mathcal{B}'$. Ecrire $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
3. Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Rappeler l'expression reliant A, D, P et P^{-1}.

1 Informatique

TP3 : savoir simuler des lois usuelles

Suites implicites

Etude des suites implicites : cf exos 1,2 et 3 du TD 4.

Suites récurrentes d'ordre 1

Méthodes d'étude des suites récurrentes d'ordre 1 :
• **Méthode 1 :** Prouver dans cet ordre les 4 points suivants :

1. Justifier l'existence en trouvant un intervalle J stable par f contenant u_0 (si besoin à l'aide des variations de f) puis prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

2. Etudier ses variations de (u_n) :
   - Soit en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$: directement ou bien à l'aide de l'étude du signe de $g(x) = f(x) - x$
   - Soit en comparant u_1 et u_0 et en prouvant les variations par récurrence (si on a prouvé au préalable que f est croissante).

3. prouver qu'elle converge par théorème des suites monotones $(*)$.

4. Trouver les valeurs POSSIBLES de la limite par passage à la limite dans les inégalités puis passage à la limite dans l'égalité de récurrence : théorème du point fixe $(*)$.
   En déduire la limite.

Exercices : -pour s'entraîner à l'étude directe de la suite : exos 3 et 4 du TD3
- et pour s'entraîner à l'utilisation de l'étude de la fonction f et de la fonction $x \mapsto f(x) - x$: exercices partie II du TD 4 .

• **Méthode 2 :** Par utilisation de l'inégalité des accroissements finis $(*)$ appliquée à la fonction f (cf DM1 et DM3 et exercice 8 du TD4).

IV. Applications linéaires

• Définition et propriétés d'une application linéaire. Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.

• Opérations sur les applications linéaires $(*)$.
Prop 5 : Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est linéaire. $(\spadesuit)$

• Noyau d'une application linéaire : définition $(*)$, **structure d'espace vectoriel** $(\spadesuit)$, lien avec l'injectivité :

Prop 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$ $(\spadesuit)$.

• Image d'une application linéaire : définition $(*)$, **structure d'espace vectoriel** $(\spadesuit)$, lien avec la surjectivité $(*)$.

Prop 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. si $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E alors $(f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $Im\ f$ $(*)$.

• Rang d'une application linéaire, théorème du rang $(*)$, caractérisation des isomorphismes en dimension finie $(*)$.

Thm 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $dim(E) = dim(F)$: si f est injective alors f est bijective. $(\spadesuit)$

• Matrice d'une application linéaire : savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases, la matrice d'un endomorphisme dans une base.

• Caractérisation d'une application linéaire par sa matrice. **Application :** si deux endomorphismes f et g ont même matrice dans une base $\mathcal{B}$, alors $f = g$.

• Savoir déterminer $f(\vec{u})$, Imf et $\ker f$ à partir d'une matrice A de f.

• Opérations sur les matrices : matrice d'une somme, d'une composée d'applications linéaires. Lien entre bijectivité et matrice inversible. Matrice de la bijection réciproque.

• Relation entre deux matrices d'un même endomorphisme : formule de changement de base.
Théorème : 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme f.