Programme de colle - semaine du 02 Décembre 2019

Note aux colleurs : Cette colle commencera par des questions de cours : énoncer plusieurs définitions et théorèmes étoilés $(*)$ *+ en donner la preuve pour les propriétés signalées par* $(\spadesuit)$.

Continuer ensuite par une ou deux questions des exercices exigibles.

Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.

En ce qui concerne les couples de variables aléatoires, le cours doit être su ! En revanche, peu d'exercices auront été traités en classe. Merci d'être indulgents sur les exercices.

Liste des exercices exigibles

Exercice 1.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe (x', y', z') où $\begin{cases} x' = x - 2y - \frac{4}{3}z \\ y' = -2x + 4y + \frac{8}{3}z \\ z' = 3x - 6y - 4z \end{cases}$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On note $e'_1 = (2, 1, 0)$, $e'_2 = (4, 0, 3)$ et $e'_3 = (1, -2, 3)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Utiliser A' pour :
   (a) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
   (b) Déterminer si $f - Id$ est un isomorphisme. Que vaut $Ker(f - Id)$, $Im(f - Id)$?
   (c) Déterminer $f \circ f$

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1. On note $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{k}$.
   Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E notée $\mathcal{B}'$. Ecrire $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
3. Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Rappeler l'expression reliant A, D, P et P^{-1}.

Exercice 3.

D'après EDHEC 1998

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\ e_1 + e_2 - a\ e_3$$

1. (a) Déterminer une base de Im f_a.
   (b) Montrer qu'une base de ker f_a est $(e_2,\ e_1 - e_3)$.
2. Ecrire la matrice A de f_a dans $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$
3. On pose $e'_1 = f_a(e_1) \quad e'_2 = e_1 - e_3 \quad e'_3 = e_3$

(a) Montrer que $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$ est une base de E.

(b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.

(c) Ecrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.Donner la formule reliant A, A' et P.

Exercice 4.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(\vec{i}) = \vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{i}$ et $f(\vec{k}) = \vec{j}$.

1. Déterminer f^3. Donner un polynôme annulateur de f
2. En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1}.
3. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par $g = f - f^2$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 5.
Dans les situations suivantes, dites si la variables aléatoire X suit une loi usuelle (oui ?non ? pourquoi ?). Si oui, explicitez la loi, son espérance et sa variance.

1. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 10 tirages dans cette urne, avec remise et X compte le nombre de boules noires obtenues.
2. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 4 tirages dans cette urne, sans remise et X compte le nombre de boules noires obtenues.
3. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise et on s'arrête lorsqu'on a obtenu la première boule rouge. X est le nombre de tirages effectués.
4. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On effectue une succession de 10 tirages avec remise et on note X le rang d'apparition de la première boule rouge. On convient que $X = 0$ si les boules tirées sont toutes noires.
5. Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et celle de boules noires est q.
   Ainsi, on a $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.
   On effectue une succession de tirages avec remise et on s'arrête dès qu'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
   On note X le nombre de tirages effectués.
6. On lance un dé à six faces équilibré et X est le numéro de la face obtenue.
7. Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
   On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

Exercice 6.
Une municipalité a lancé une étude statistique concernant les problèmes rencontrés par les usagers des transports en commun.

L'enquête révèle que la probabilité qu'un usager attende moins de 7 minutes à une station donnée est égale à p, p appartenant à $]0, 1[$.

Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

1. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance en fonction de p.

2. On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
Déterminer la loi de Z.

Exercice 7.

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note X le rang du premier "1" obtenu. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   Calculer $P(X \leq k)$ puis $P(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note Y_n le rang d'apparition du nième "1" obtenu.
   On note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de "1" obtenus au cours des M premiers lancers.
   (a) Déterminer la loi de C_M.
   (b) Soit $k \geq n$, exprimer l'évènement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'évènement A_k : "obtenir la face 1 au k ième lancer".
   (c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 8.
1.$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Espérance de $Y = (-1)^X$.
2.$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.Espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$. (on pourra vérifier que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$).

Exercice 9.
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	p	0	p
2	p	0	p
3	0	$2p$	0

1. Déterminer p.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance du couple (X, Y).
5. Calculer $P(X = Y)$
6. Calculer $P(X < Y)$
7. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

I Révisions lois discrètes usuelles

cf TD de révisions partie III exercices 12,13,14 et 17 et TP 4.

II. Applications linéaires

• Définition et propriétés d'une application linéaire. Vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.

• Opérations sur les applications linéaires $(*)$.
Prop 5 : Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est linéaire. (♠)

• Noyau d'une application linéaire : définition (∗), **structure d'espace vectoriel** (♠) , lien avec l'injectivité :

Prop 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $\ker f = \{\vec{0}\}$ (♠).

• Image d'une application linéaire : définition (∗), **structure d'espace vectoriel** (♠) , lien avec la surjectivité (∗).

Prop 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. si $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E alors $(f(\vec{e}_1), ..., f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $Im\ f$ (∗).

• Rang d'une application linéaire, théorème du rang (∗), caractérisation des isomorphismes en dimension finie (∗).

Thm 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $dim(E) = dim(F)$: si f est injective alors f est bijective. (♠)

• Matrice d'une application linéaire : savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases, la matrice d'un endomorphisme dans une base.

• Caractérisation d'une application linéaire par sa matrice. **Application :** si deux endomorphismes f et g ont même matrice dans une base $\mathcal{B}$, alors $f = g$.

• Savoir déterminer $f(\vec{u})$, Imf et $\ker f$ à partir d'une matrice A de f.

• Opérations sur les matrices : matrice d'une somme, d'une composée d'applications linéaires. Lien entre bijectivité et matrice inversible. Matrice de la bijection réciproque.

• Relation entre deux matrices d'un même endomorphisme : formule de changement de base.
Théorème : 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme f.

III. Couples de variables aléatoires

1) Couple de variables aléatoires

• Loi d'un couple de variables aléatoires. Caractérisation de la loi d'un couple (théorème 2).

• Loi marginales : définition et méthode de calcul des lois marginales.

• Lois conditionnelles.

• Indépendance de 2 variables aléatoires. (∗)
• Covariance : Définition, propriétés et formules de Koenig-Huygens (∗).
Covariance de 2 variables indépendantes.

• Coefficient de corrélation linéaire : Définition, propriétés .

2) Variable aléatoire $Z = g(X,Y)$

• Méthode de calcul de la loi de $Z = g(X,Y)$. **Application au calcul de la loi d'une somme de 2 Poisson indépendantes** (♠).

Cas particulier : loi d'une somme de binomiales indépendantes de même paramètre p, loi d'une somme de Poisson indépendantes (∗) .

• Espérance de $Z = g(X, Y)$: théorème de transfert à 2 variables, cas particuliers : espérance d'une combinaison linéaire de variables (♠), espérance d'un produit de variables indépendantes (♠).

• Variance d'une somme $(*)$.