Programme de colle - semaine du 6 Janvier 2020

Note aux colleurs : Cette colle commencera par des questions de cours : énoncer plusieurs définitions et théorèmes étoilés $(*)$ *+ en donner la preuve pour les propriétés signalées par* $(\spadesuit)$.

Continuer ensuite par une ou deux questions des exercices exigibles.

Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.

Exercice 1.
Une municipalité a lancé une étude statistique concernant les problèmes rencontrés par les usagers des transports en commun.

L'enquête révèle que la probabilité qu'un usager attende moins de 7 minutes à une station donnée est égale à p, p appartenant à $]0,1[$.

Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

1. On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance en fonction de p.

2. On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
Déterminer la loi de Z.

Exercice 2.

1. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note X le rang du premier "1" obtenu. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   Calculer $P(X \leq k)$ puis $P(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On effectue une succession (infinie) de lancers d'un dé équilibré. On note Y_n le rang d'apparition du nième "1" obtenu.
   On note également C_M la variable aléatoire égale au nombre de "1" obtenus au cours des M premiers lancers.
   (a) Déterminer la loi de C_M.
   (b) Soit $k \geq n$, exprimer l'évènement $[Y_n = k]$ à l'aide de la variable aléatoire C_{k-1} et de l'évènement A_k : "obtenir la face 1 au k ième lancer".
   (c) En déduire la loi de Y_n.

Exercice 3.
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'un jeton avec remise. X est la v.a.r. égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.
On note A_i : "le jeton numéro i est obtenu au premier tirage".

1. Calculer $P_{A_i}(X = k)$.
2. En appliquant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $Y = X - 1$. La reconnaître et en déduire sans calculs $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4.
On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y). (on donnera cette loi sous forme d'un tableau à double entrée et on justifiera précisément le calcul d'au moins 3 valeurs de ce tableau).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 5. : **loi d'un deuxième temps d'attente**
On lance un dé indéfiniment ; X est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier "6".
Z est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "6".

1. **Méthode 1 : loi du deuxième temps d'attente obtenue comme loi marginale**
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Z).
   (b) En déduire la loi de Z.
2. **Méthode 2 : loi du deuxième temps d'attente comme somme de temps d'attentes** On note Y le nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier "6", pour obtenir le deuxième "6".
   (a) Justifier que X et Y sont indépendantes et donner leurs lois.
   (b) Exprimer Z en fonction de X et de Y. Retrouver alors la loi de Z et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 6.
Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries de B ou R : par exemple, si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR...$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième série ($RRRRRR$) est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
3. En déduire la loi de X_2.
4. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 7.
On admet que le nombre N de têtards issus des oeufs pondus en mars et avril d'une année par les grenouilles vertes d'un étang suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Ces têtards sont soumis à des prédateurs nombreux et voraces (poissons, larves de libellules...), et on admet que chacun d'entre eux a la probabilité p, hélas très faible, de parvenir à son développement complet, et qu'ils se développent (ou sont dévorés) de façon indépendante.
On note X le nombre de têtards qui parviennent à leur développement complet et se transforment ainsi à l'automne en une mignonne petite grenouille verte d'environ 2cm de long, et Y le nombre de ceux qui meurent avant. On a ainsi, $N = X + Y$.

1. Déterminer pour tout couple (i, k) d'entiers naturels, la probabilité conditionnelle $P_{(N=k)}(X = i)$.
   On distinguera les cas $i \leq k$ et $i > k$.
2. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
   on fera apparaître, au cours du calcul, une série exponentielle de paramètre $x = \lambda(1 - p)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
4. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $P((X = i) \cap (Y = j))$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8.
Un secrétaire envoie un courrier nécessitant une réponse à n contacts ($n \geq 2$). On admet que les contacts répondent à tout message de façon indépendante et avec la probabilité p, ($p \in]0,1[$). On note X le nombre de réponses reçues. Le secrétaire envoie alors un message de rappel aux $n - X$ contacts qui n'ont pas répondu. On note Y le nombre de réponses à ce deuxième message et $Z = X + Y$ le nombre total de réponses.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Z(\Omega)$. Calculer $P(Z = 0)$ et montrer : $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$, où $q = 1 - p$.
3. Calculer, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, et $\forall j \in [\![0, n - i]\!]$, $P_{(X=i)}(Y = j)$.
4. Justifier que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P((X = i) \cap (Y = k - i))$.
5. Après avoir vérifié : $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$, montrer que Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p(1 + q)$.

Exercice 9. : loi du min, loi du max
Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X \leq k)$ et $P(X > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On note $Z = sup(X, Y)$.
   (a) Calculer $P(Z \leq k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   (b) Prouver l'égalité pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1)$.
   (c) En déduire $P(Z = k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
3. On note $T = inf(X, Y)$.
   (a) Calculer $P(T > k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $P(T = k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Reconnaître la loi de T.

Exercice 10.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 (\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}})dx, \qquad \int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx \qquad \int_0^1 t(1-t)^n dt, \qquad \int_0^t \sqrt{3x+1}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{5+u^3}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{(5+u^3)^2}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{5+u^3}}du, \qquad \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

$$\int_1^x (1 - t^2\ln(t))dt, \qquad \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx, \qquad \int_0^4 |x-2|dx$$

Exercice 11.
Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1 + x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Etablir que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) Justifier l'inégalité $x^n \ln(1 + x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   (b) En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$
   (b) Montrer que :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$
   (c) En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 12.
Soit F définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

1. Montrer que F est définie sur $E =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur E et calculer $F'(x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Vérifier ce résultat en calculant $F(x)$ directement.

Exercice 13.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Déterminer la dérivée de f sur son ensemble de définition et en déduire l'expression de f pour tout x.
c) Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 14.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Calculer $f'(x)$, pour $x \neq 0$.
4. Etudier la parité de f.
5. Etudier le signe de f.
6. Montrer : $\forall x > 0,\ f(x) \geq \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x)$.

Exercice 15.
Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t) = t\ln(t)$ et soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

1. Montrer les encadrements $(*)$: $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$.
2. Ecrire $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt$ sous forme d'une seule intégrale.
3. En sommant les encadrements $(*)$, montrer : $S_n - n\ln(n) \leq \int_1^n f(t)dt \leq S_n$
4. En déduire un encadrement de S_n.
5. Calculer $\int_1^n f(t)dt$.
6. Déterminer un équivalent de S_n.

Exercice 16.
Remarque : on rappelle que la notation $\sqrt[n]{t}$ se nomme la "racine n-ième de t " et est définie par sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\sqrt[n]{t} = t^{\frac{1}{n}}$.
Il s'agit de la bijection réciproque de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$ car $3^3 = 27$; $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ car $2^4 = 16$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

1. Montrer que $\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1;2;\cdots;n-1\}$, $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire que $\forall n \geq 2$, $\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.
4. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 17.

Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0,1]$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (appelée somme de Riemann de f sur $[0,1]$.

Le but de cet exercice est de prouver, dans ce cas particulier, le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt}$$

1. Démontrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En sommant les inégalités ci-dessus, en déduire que $S_n - \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq S_n$.
3. En déduire un encadrement de S_n, puis prouver la propriété demandée.

Exercice 18.

Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \{0; 1; 2; \cdots; n-1\}$, $\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 2^t\ dt \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}$.

b) En déduire un encadrement de u_n.

c) Obtenir la limite de u_n.

d) Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

I. Couples de variables aléatoires

1) Couple de variables aléatoires

• Loi d'un couple de variables aléatoires. Caractérisation de la loi d'un couple (théorème 2).

• Loi marginales : définition et méthode de calcul des lois marginales.

• Lois conditionnelles.

• Indépendance de 2 variables aléatoires. $(*)$

• Covariance : Définition, propriétés et formules de Koenig-Huygens $(*)$.
Covariance de 2 variables indépendantes.

• Coefficient de corrélation linéaire : Définition, propriétés .

2) Variable aléatoire $Z = g(X,Y)$

• Méthode de calcul de la loi de $Z = g(X,Y)$. **Application au calcul de la loi d'une somme de 2 Poisson indépendantes** (♠).

Cas particulier : loi d'une somme de binomiales indépendantes de même paramètre p, loi d'une somme de Poisson indépendantes $(*)$.

• Espérance de $Z = g(X,Y)$: théorème de transfert à 2 variables, cas particuliers : espérance d'une combinaison linéaire de variables (♠), espérance d'un produit de variables indépendantes (♠).

• Variance d'une somme $(*)$ et application au calcul d'une covariance. Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

II. Intégration sur un segment

• Calcul d'une intégrale : par primitive, par intégration par parties et par changement de variable (le changement de variable doit être donné à l'étudiant).

• Etude des suites définies par une intégrale.

• Etude des fonctions définies par une intégrale.

• Comparaison sommes-intégrales : les étudiants doivent avoir en tête la méthode permettant d'encadrer une somme à l'aide de l'intégrale correspondante mais aucune théorie sur la comparaison série-intégrale n'est à connaître. On veillera à donner quelques questions intermédiaires si besoin sans pénaliser l'étudiant.