# Programme de colle - semaine du 13 Janvier 2020

*Note aux colleurs : Merci de commencer la colle en donnant une ou deux questions de l'un des exercices faits en classe.*
*Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.*
*Merci de tester la connaissance du cours à travers son application dans les exercices et de favoriser la compréhension du cours au "par coeur".*

**Liste des exercices exigibles**

**Exercice 1.**
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 (\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}})dx, \qquad \int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx \qquad \int_0^1 t(1-t)^n dt, \qquad \int_0^t \sqrt{3x+1}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{5+u^3}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{(5+u^3)^2}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{5+u^3}}du, \qquad \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

$$\int_1^x (1-t^2\ln(t))dt, \qquad \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx, \qquad \int_0^4 |x-2|dx$$

**Exercice 2.**
Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $I_0$.
2. (a) Etablir que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente.
3. (a) Justifier l'inégalité $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$
   (b) Montrer que :
   $$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$
   (c) En déduire un équivalent de $I_n$.

**Exercice 3.**
Soit $F$ définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

1. Montrer que $F$ est définie sur $E = ]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Montrer que $F$ est dérivable sur $E$ et calculer $F'(x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Vérifier ce résultat en calculant $F(x)$ directement.

**Exercice 4.**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
b) Déterminer la dérivée de $f$ sur son ensemble de définition et en déduire l'expression de $f$ pour tout $x$.
c) Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

**Exercice 5.**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Démontrer que $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Calculer $f'(x)$, pour $x \neq 0$.
4. Etudier la parité de $f$.
5. Etudier le signe de $f$.
6. Montrer : $\forall x > 0,\ f(x) \geq \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x)$.

**Exercice 6.**
Soit $f$ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = t\ln(t)$ et soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

1. Montrer les encadrements $(*)$ : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$.
2. Ecrire $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt$ sous forme d'une seule intégrale.
3. En sommant les encadrements $(*)$, montrer : $S_n - n\ln(n) \leq \int_1^n f(t)dt \leq S_n$
4. En déduire un encadrement de $S_n$.
5. Calculer $\int_1^n f(t)dt$.
6. Déterminer un équivalent de $S_n$.

**Exercice 7.**
*Remarque* : on rappelle que la notation $\sqrt[n]{t}$ se nomme la "racine n-ième de t " et est définie par sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\sqrt[n]{t} = t^{\frac{1}{n}}$.
Il s'agit de la bijection réciproque de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$ car $3^3 = 27$ ; $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ car $2^4 = 16$ .

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

1. Montrer que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1; 2; \cdots; n-1\}$, $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire que $\forall n \geq 2$, $\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.
4. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Exercice 8.**
Soit $f$ une fonction continue et décroissante sur $[0, 1]$. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (appelée somme de Riemann de $f$ sur $[0, 1]$.
Le but de cet exercice est de prouver, dans ce cas particulier, le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt}$$

1. Démontrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En sommant les inégalités ci-dessus, en déduire que $S_n - \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq S_n$.
3. En déduire un encadrement de $S_n$, puis prouver la propriété demandée.

**Exercice 9.**
Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \{0; 1; 2; \cdots; n-1\}$, $\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 2^t \, dt \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}$.
b) En déduire un encadrement de $u_n$.
c) Obtenir la limite de $u_n$.
d) Retrouver cette limite en calculant $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 10.** EML 2006
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = AM - MD$.

0. Vérifier que $f$ est bien linéaire
1. Déterminer le noyau de $f$ et donner sa dimension.
2. Quelle est la dimension de l'image de $f$ ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de $f$ et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Montrer que $-1$ est aussi valeur propre de $f$.
5. Est-ce que $f$ est diagonalisable ?
6. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$ pour tout $\lambda$ réel $\notin \{-1, 0, 1\}$.
7. Montrer que $f \circ f \circ f = f$.

**Exercice 11.**
Soit l'application linéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

1. Calculer $\Phi^2$ puis justifier que $\Phi$ est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{-1; 1\}$.
3. $\Phi$ est-elle diagonalisable ?
4. Retrouver $\Phi^2$ par calcul matriciel .

**Exercice 12.**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calculs qu'il existe $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter une telle matrice $D$.
2. (a) Vérifier que $D(D-I)(D-4I) = 0$.
   (b) En déduire que $A^3 = 5A^2 - 4A$.
   (c) Trouver une matrice $B$, fonction de la matrice $P$, telle que $B^2 = A$.
   (d) Prouver qu'il existe $D_a$ diagonale (à expliciter) telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

**Exercice 13.**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ tel que : $f(e_1) = 3e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $\quad f(e_2) = 2f(e_1)$ et $f(e_3) = 3e_3$.

1. Ecrire $A = \mathcal{M}at_B(f)$ puis calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$ .
2. Donner $Sp(f)$ sans calcul supplémentaire.
3. Diagonaliser $A$.

**Exercice 14.**
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $J$ est-elle diagonalisable ? inversible ? En déduire une valeur propre de $J$.
2. Justifier avec le minimum de calculs de $P^{-1}JP$ est diagonale et donner cette matrice.

# I. Intégration sur un segment

• Calcul d'une intégrale : par primitive, par intégration par parties et par changement de variable (le changement de variable doit être donné à l'étudiant).

• Etude des suites définies par une intégrale.

• Etude des fonctions définies par une intégrale.

• Comparaison sommes-intégrales : les étudiants doivent avoir en tête la méthode permettant d'encadrer une somme à l'aide de l'intégrale correspondante mais aucune théorie sur la comparaison série-intégrale n'est à connaître. On veillera à donner quelques questions intermédiaires si besoin sans pénaliser l'étudiant.

# II.Réduction

• Eléments propres d'un endomorphisme $f$ :
- Définition des valeurs propres, spectre, définition des vecteurs propres, du sous-espace propre associé à une valeur propre.
- Lien avec l'application $f - \lambda Id$.
Cas particulier de la valeur propre 0.
- Polynômes annulateurs et valeurs propres possibles de $f$.

• Eléments propres d'une matrice carrée $A$ :
- Définition des valeurs propres, spectre, définition des vecteurs propres, du sous-espace propre associé à une valeur propre.
- Lien avec la matrice $A - \lambda I$.
- Polynômes annulateurs et valeurs propres possibles de $A$.
- Si $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ : Lien entre les éléments propres de $A$ et les éléments propres de $f$.

• Réduction :
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice diagonalisable.
- Propriété de liberté des familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Corollaire : nombre maximal de valeurs propres.
- Caractérisation des endomorphismes (matrices diagonalisables) : cas particuliers où $f$ (resp A) a $n = dim(E)$ valeurs propres ; cas général : caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Cas particulier des matrices symétriques.