Programme de colle - semaine du 20 Janvier 2020

Note aux colleurs : Merci de commencer la colle en donnant une ou deux questions de l'un des exercices faits en classe.
Si un étudiant connaît son cours et sait refaire les exercices du TD, il doit avoir au moins la moyenne.
Merci de tester la connaissance du cours à travers son application dans les exercices et de favoriser la compréhension du cours au "par coeur".

Liste des exercices exigibles

Exercice 1. EML 2006
Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On considère $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = AM - MD$.

0. Vérifier que f est bien linéaire
1. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
2. Quelle est la dimension de l'image de f ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.
5. Est-ce que f est diagonalisable ?
6. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$ pour tout λ réel $\notin \{-1, 0, 1\}$.
7. Montrer que $f \circ f \circ f = f$.

Exercice 2.
Soit l'application linéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

1. Calculer Φ^2 puis justifier que Φ est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{-1; 1\}$.
3. Φ est-elle diagonalisable ?
4. Retrouver Φ^2 par calcul matriciel .

Exercice 3.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 4+a \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calculs qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter une telle matrice D.
2. (a) Vérifier que $D(D-I)(D-4I) = 0$.
   (b) En déduire que $A^3 = 5A^2 - 4A$.
   (c) Trouver une matrice B, fonction de la matrice P, telle que $B^2 = A$.
   (d) Prouver qu'il existe D_a diagonale (à expliciter) telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

Exercice 4.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(e_1) = 3e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $\quad f(e_2) = 2f(e_1)$ et $f(e_3) = 3e_3$.

1. Ecrire $A = \mathcal{M}at_B(f)$ puis calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$.
2. Donner $Sp(f)$ sans calcul supplémentaire.
3. Diagonaliser A.

Exercice 5.
$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. J est-elle diagonalisable ? inversible ? En déduire une valeur propre de J.
2. Justifier avec le minimum de calculs de $P^{-1}JP$ est diagonale et donner cette matrice.

Exercice 6.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de f. f est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer trois vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ de $\mathbb{R}^3$ formant une base de $\mathbb{R}^3$ et vérifiant :

$$\begin{cases} f(\vec{e_1}) & = & -2\vec{e_1} \\ f(\vec{e_2}) & = & \vec{e_2} \\ f(\vec{e_3}) & = & \vec{e_2} + \vec{e_3} \end{cases}$$

   En déduire une matrice triangulaire semblable à A.

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(f - Id)^2 = 0$.
2. En déduire que f n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Justifier qu'il existe P (que l'on explicitera) telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 8.

Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de Im v et Ker v . En déduire une valeur propre de v.
2. Déterminer les autres valeurs propres de v. Justifier sans autres calculs que v est diagonalisable.

Exercice 9.
Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t\ln(t)}, \quad \int_0^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}dt, \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$$

(pour la dernière intégrale, on posera le changement de variable $u = \sqrt{x}$)

Exercice 10.
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5+2t^3+t^2+1}dt, \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{2^{t^2}}dt$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t}dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}$$

I.Réduction

• Eléments propres d'un endomorphisme f :
- Définition des valeurs propres, spectre, définition des vecteurs propres, du sous-espace propre associé à une valeur propre.
- Lien avec l'application $f-\lambda Id$.
Cas particulier de la valeur propre 0.
- Polynômes annulateurs et valeurs propres possibles de f.

• Eléments propres d'une matrice carrée A :
- Définition des valeurs propres, spectre, définition des vecteurs propres, du sous-espace propre associé à une valeur propre.
- Lien avec la matrice $A-\lambda I$.
- Polynômes annulateurs et valeurs propres possibles de A.
- Si $A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$: Lien entre les éléments propres de A et les éléments propres de f.

• Réduction :
- Définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice diagonalisable.
- Propriété de liberté des familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Corollaire : nombre maximal de valeurs propres.
- Caractérisation des endomorphismes (matrices diagonalisables) : cas particuliers où f (resp A) a $n=dim(E)$ valeurs propres ; cas général : caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Cas particulier des matrices symétriques.

II. Intégration sur un segment et intégrales généralisées

• Convergence et calcul d'intégrales impropres en un ou deux points, finis ou infinis.
• Cas particulier des fonctions paires ou impaires sur $\mathbb{R}$.
• Nature des intégrales de Riemann au voisinage de 0, au voisinage de $+\infty$.
• Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction positive : cas particulier des intégrales faussement généralisées en un point fini, théorèmes de comparaison.
• Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction quelconque : si l'intégrale converge absolument alors elle converge.

Figurent aussi au programme de colle les révisions des méthodes suivantes :
• Etude des suites définies par une intégrale.
• Etude des fonctions définies par une intégrale.
• Comparaison sommes-intégrales.