Chapitre 2
Etude locale de fonctions

I Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

1 Négligeabilité au voisinage d'un point

Définition 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit a un point de I ou du bord de I. On dit que f ***est négligeable par rapport à*** *g* ***au voisinage de*** *a, noté $\mathbf{f(x) = o_{x\to a}(g(x))}$ s'il existe une fonction ε, définie au voisinage de a, telle que :*

$f = \varepsilon \times g$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ ce qui est équivalent, si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a, à $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = 0$.

Autrement dit,

$$\boxed{f(x) = o_{x\to a}(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f}{g} = 0}$$

Remarque

On dit alors que g est "prépondérante" sur f au voisinage de a. Cette définition donne un cadre rigoureux à la notion de "terme prépondérant" dans une somme.

Exemples

Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Sinon, corriger !

$$x = o_{x\to\pm\infty}(x^3), \qquad x = o_{x\to 0}(x^3), \qquad \ln(x) = o_{x\to+\infty}(x), \qquad \ln(x) = o_{x\to 0}(x)$$

Théorème 1 : comparaison des fonctions puissances

• Au voisinage de $\pm\infty$, la plus **petite** puissance positive de x est **négligeable** par rapport à la plus grande puissance positive :

$$\boxed{0 \leq n < m \Rightarrow x^n = o_{x\to\pm\infty}(x^m)}$$

• Au voisinage de 0, la plus **grande** puissance positive de x est **négligeable** par rapport à la plus petite puissance positive :

$$\boxed{0 \leq n < m \Rightarrow x^m = o_{x\to 0}(x^n)}$$

Théorème 2 : croissances comparées des fonctions usuelles

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ln(x) = o_{x\to+\infty}(x^\alpha)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ln(x) = o_{x\to 0}(\frac{1}{x^\alpha})}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^\alpha = o_{x\to+\infty}(e^x)}$

Remarque

Attention ! : La notation $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ n'est pas une vraie égalité ! ! C'est juste une notation qui signifie que f est "l'une des fonctions qui est négligeable par rapport à g au voisinage de a".
Ainsi, on peut avoir : $\boxed{o_{x\to a}(g(x)) - o_{x\to a}(g(x)) \neq 0}$. Par exemple : $\ln(x) = o_{x\to+\infty}(x)$ et $\sqrt{x} = o_{x\to+\infty}(x)$ et pourtant $\ln(x) - \sqrt{x} \neq 0$!

Propriété 3 : Règles de calculs sur les "petits o"

1. Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ alors $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{Si } f(x) = o_{x\to a}(g(x)) \text{ alors } \lambda f(x) = o_{x\to a}(g(x))}$
3. $\boxed{\text{Si } f_1(x) = o_{x\to a}(g(x)) \text{ et } f_2(x) = o_{x\to a}(g(x)) \text{ alors } f_1(x) + f_2(x) = o_{x\to a}(g(x))}$
4. $\boxed{\text{Si } f(x) = o_{x\to a}(g(x)) \text{ alors } h(x)f(x) = o_{x\to a}(h(x) \times g(x))}$
5. $\boxed{\text{Si } f(x) = o_{x\to a}(g(x)) \text{ et } g(x) = o_{x\to a}(h(x)) \text{ alors } f(x) = o_{x\to a}(h(x))}$

Exemples

Vérifier les égalités suivantes :

1. $2x^2 - x^3 - 4o_{x\to 0}(x^3) = o_{x\to 0}(x)$
2. $-4x^3 + xo_{x\to 0}(x) - o_{x\to 0}(x^3) + o_{x\to 0}(x^7) + \frac{o_{x\to 0}(x^3)}{x} = o_{x\to 0}(x^2)$

Propriété 4 : Propriété fondamentale des "petits o"

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = o_{x\to a}(1)}$

Définition 2 : négligeabilité entre suites

soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est ***négligeable*** *par rapport à (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$, à partir d'un certain rang. Ceci est équivalent, si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Autrement dit,*

$$\boxed{u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

Remarque
Les propriétés des négligeables restent les mêmes adaptées aux suites.

Exemple
Soit une suite (u_n) vérifiant $\lim nu_n + 2n = 1$. Montrer que $u_n = -2 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2 Equivalence au voisinage d'un point

a) Définition et propriétés

Définition 3

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
On dit que f ***est équivalente à*** *g* ***au voisinage de*** *a si :*

$$\boxed{g(x) = f(x) + o_{x\to a}(f(x))}$$

Ceci est équivalent, si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a, à :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1}$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Remarque
1) Si f est équivalente à g au voisinage de a, alors g est équivalente à f au voisinage de a. On dit que les fonctions f et g sont équivalentes en a.

2) Attention à ne pas confondre le signe $\sim$ qui s'applique à des fonctions avec le signe $\Leftrightarrow$ qui s'applique à des équations et signifie qu'elles ont même solution.
Les deux notions n'ont strictement rien à voir.

Exemples
• toute fonction polynômiale est équivalente au voisinage de $\pm\infty$ à son monôme de plus haut degré : $-2x^3-5x^2+1 = -2x^3 + o_{x\to\pm\infty}(x^3) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -2x^3$, $\quad x^2 - x = x^2 + o_{x\to\pm\infty}(x^2) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2$.
• toute fonction polynômiale est équivalente au voisinage de 0 à son monôme de plus bas degré : $-2x^3 - 5x^2 + 1 = o_{x\to 0}(1) + 1 \underset{x\to 0}{\sim} 1$, $\quad x^2 - x = o_{x\to 0}(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -x$.
• De manière générale, une <u>somme</u> de termes possédant un terme prépondérant est <u>équivalente au terme prépondérant</u> : $2e^x - 3x^{10} + \ln(x) + 2 = 2e^x + o_{x\to+\infty}(e^x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^x$.
• $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. En effet, $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0} \underset{x\to 0}{\to} exp'(0) = 1$ car exp est dérivable en 0. Ainsi, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Théorème 5 : Règles de calculs sur les équivalents

- Si $f(x)$ converge vers une limite **FINIE, NON NULLE** l lorsque x tend vers a alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$.
- On peut multiplier et diviser les équivalents.
- On peut faire des changements de variables dans les équivalents.

Exemples

• Trouvons un équivalent en $+\infty$ de $\frac{e^{\frac{1}{x}}(-2x^3-5x^2+1)}{(x^2-1)^2}$: $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ car $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$ et $-2x^3-5x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -2x^3$ donc, par produit d'équivalents, $e^{\frac{1}{x}} \times (-2x^3-5x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \times -2x^3$.
De plus, $x^2-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc par produits, $(x^2-1)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4$.
Par quotient d'équivalents, on obtient $\frac{e^{\frac{1}{x}}(-2x^3-5x^2+1)}{(x^2-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2x^3}{x^4} = \frac{-2}{x}$

• $e^{x-2}-1 \underset{x\to 2}{\sim} x-2$:
En effet, en posant le changement de variable $X = x-2$, on remarque que $X \underset{x\to 2}{\to} 0$.
Ainsi, on peut utiliser l'équivalent $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ qui donne : $e^{x-2}-1 \underset{x\to 2}{\sim} x-2$.

Remarques : Erreurs à éviter sur les calculs d'équivalents

1. Une fonction qui tend vers 0 ou vers $\pm\infty$ n'est pas équivalente à sa limite ! Il est impossible d'être équivalent à 0 ou à l'infini, ça n'a pas de sens !
2. La puissance est la seule fonction que l'on peut appliquer aux équivalents. De manière générale ON NE PEUT PAS COMPOSER un équivalent PAR UNE FONCTION.
   Aussi, ON NE PEUT PAS SOMMER DES EQUIVALENTS.

   Contre-exemples
   • $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $-x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2+1$ et pourtant $x = x^2+x-x^2 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x^2-x^2+1 = 1$.
   • $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x^2}$. En effet, $\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty \neq 1$.

Définition 4 : équivalence entre suites

soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est ***équivalente*** *à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$ si $u_n = v_n + o(v_n)$. Ceci est équivalent, si v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Autrement dit,*

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Remarque

Les règles de calculs sur les équivalents restent les mêmes adaptées aux suites.

Exemple

Déterminer un équivalent de $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$.

b) Utilisation des équivalents

Théorème 6 : limite en un point

Soient f et g deux fonctions équivalentes en a, si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Théorème 7 : Signe au voisinage d'un point

Si f et g sont deux fonctions équivalentes en a, alors elles sont de même signe au voisinage de a.

II Développement limité au voisinage d'un point

Les développements limités sont un outil supplémentaire d'étude locale des fonctions.
Il permettent de trouver un équivalent d'une fonction au voisinage d'un point de son ensemble de définition. Ils consistent à approcher toute fonction par une fonction polynomiale au voisinage d'un point. On est donc ramenés à des fonctions très simples à étudier.

1 Développement limité à l'ordre 1

a) Définition et premières propriétés

Définition 5 : développement limité en 0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, avec 0 appartenant à I ou au bord de I.
on dit que ***f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de*** 0 *s'il existe un polynôme $P(X) = a + bX$ de degré inférieur ou égal à 1 (fonction affine) tel que :*

$$\boxed{f(x) = P(x) + o_{x\to 0}(x) = a + bx + o_{x\to 0}(x)}$$

Exemple

Tout polynôme admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 dont la partie régulière est la somme des monômes de degré inférieur ou égal à 1.
Par exemple, donnons les développements limités d'ordre 1 de $P(x) = 1 - x$ et $Q(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 + 4x - 1$:
$P(x) = 1 - x + o_{x\to 0}(x)$;
$Q(x) = o_{x\to 0}(x) - 3o_{x\to 0}(x) + o_{x\to 0}(x) + 4x - 1 = -1 + 4x + o_{x\to 0}(x)$.

Définition 6 : développement limité en x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, avec x_0 appartenant à I ou au bord de I.
on dit que ***f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de*** x_0 *s'il existe un polynôme $P(X) = a + bX$ de degré inférieur ou égal à 1 tel que :*

$$\boxed{f(x) = P(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0) = a + b(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)}$$

Methode

Pour calculer un DL en x_0, il faut se ramener en 0 (où on connaîtra plus de DLs) en posant le changement de variable :

$$\boxed{h = x - x_0 \qquad \underset{x\to x_0}{\to} 0}$$

En effet, une fonction f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si $g(h) = f(x_0 + h)$ admet un DL à l'ordre 1 en 0 .

Exemple

Cherchons le DL à l'ordre 1 en 1 de $f(x) = x + 1 + (x - 1)\ln(x)$.
On pose le changement de variable $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\to} 0$.
1) On calcule le développement limité en h :
L'expression s'écrit alors : $f(1 + h) = 2 + h + h\ln(1 + h) = 2 + h + o_{h\to 0}(h)$ car $\lim\limits_{h\to 0} \ln(1 + h) = 0$.
2) Une fois le calcul de DL terminé, on revient à la variable x :
Ainsi, $f(x) = x + 1 + o_{x\to 1}(x - 1) = 2 + (x - 1) + o_{x\to 1}(x - 1)$.
On ne simplifie surtout pas,ou voulait un polynôme de la variable $x - 1$, c'est fait !

Propriété 8 : unicité du développement limité

S'il existe, le développement limité à l'ordre 1 en x_0 d'une fonction est unique.

Preuve

Supposons qu'il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a_1 + b_1(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$ et $f(x) = a_2 + b_2(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$.

• en passant à la limite lorsque $x \to x_0$ dans les deux égalités, on obtient : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_1 = a_2$ On note l cette valeur commune.

• On isole alors b_1 (respectivement b_2) en calculant $\frac{f(x)-l}{x-x_0} = b_1 + o_{x\to x_0}(1) = b_2 + o_{x\to x_0}(1)$.
En passant à la limite de cette égalité lorsque x tend vers x_0, on obtient : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-l}{x-x_0} = b_1 = b_2$.

b) Existence d'un développement limité par la formule de Taylor-Young

Théorème 9 : formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Si f est définie en x_0 alors f a un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. Ce développement limité est :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)}$$

Preuve

$\Leftarrow$ Supposons que f est dérivable en x_0. Alors, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + o_{x\to x_0}(1)$. En multipliant par $x - x_0$, on obtient : $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$ soit $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$.
f a donc bien un développement limité à l'ordre 1 donné par la formule précédente.
$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que f est définie en x_0 et admet un DL à l'ordre 1 en x_0 : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a + b(x - x_0) + o_{x\to x_0}(x - x_0)$.
En prenant l'égalité en x_0 on obtient $f(x_0) = a$.
Montrons que f est dérivable en x_0 : $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{b(x-x_0)+o_{x\to x_0}(x-x_0)}{x-x_0} = b + o_{x\to x_0}(1) \underset{x\to x_0}{\to} b$. Le taux d'accroissement en x_0 a une limite finie donc f est dérivable en x_0 et $b = f'(x_0)$ d'où la formule de Taylor-Young.

Remarque

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, on a $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0 : on retrouve la propriété selon laquelle la courbe d'une fonction se confond avec sa tangente au voisinage du point.

2 Développement limité à l'ordre 2

a) Définition et premières propriétés

Définition 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, avec x_0 appartenant à I ou au bord de I.
on dit que ***f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de*** *x_0 s'il existe un polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ de degré inférieur ou égal à 2 tel que :*

$$\boxed{f(x) = P(x - x_0) + o_{x\to x_0}((x - x_0)^2) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o_{x\to x_0}((x - x_0)^2)}$$

Remarque

si $x_0 = 0$, un DL d'ordre 2 de f en 0 est $f(x) = a + bx + cx^2 + o_{x\to 0}(x)$.

Exemples

Un polynôme admet un DL d'ordre 2 en 0 dont la partie régulière est la somme de ses monômes de degré ≤ 2.
Exemples : donnons les DL à l'ordre 2 en 0 de $P(x) = 1 - x$ et $Q(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 + 4x - 1$:

$P(x) = 1 - x + o_{x\to 0}(x^2)$;
$Q(x) = -1 + 4x + x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$.

Propriété 10 : unicité du développement limité

S'il existe, le développement limité à l'ordre 2 en x_0 d'une fonction est unique.

b) Existence d'un développement limité par la formule de Taylor-Young

Théorème 11 : formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Si f est définie en x_0 et de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en x_0 donné par la formule :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x\to x_0}(x - x_0)^2}$$

Exemples

• Donnons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto (1 + x)^\alpha$; $(\alpha \in \mathbb{R})$:
f est de classe $\mathcal{C}_2$ sur $]-1; +\infty[$ donc admet un développement limité en 0, donné par :
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o_{x\to 0}(x)$ avec $f(0) = 1$, $f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$ donc $f'(0) = \alpha$ et $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$ donc $f''(0) = \alpha(\alpha - 1)$.

Ainsi, le DL donne :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$$

• Donnons le développement limité à l'ordre 2 en 1 de ln :
ln est de classe $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet un DL d'ordre 2 en 1 donné par :
$\ln(x) = \ln(1) + \ln'(1)(x - 1) + \frac{\ln''(1)}{2}(x - 1)^2 + o_{x\to 1}((x - 1)^2) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o_{x\to 1}((x - 1)^2)$ car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $\ln''(1) = -1$.

Remarque

La formule de Taylor-Young prouve les DLs usuels.
En revanche, on n'utilisera PAS la formule de Taylor-Young pour calculer des développements limités. On utilisera les développements limités usuels pour calculer les autres DLs.
La formule de Taylor-Young nous sera utile uniquement pour affirmer que le dl d'ordre 1 d'une fonction dérivable en x_0 donne l'équation de sa tangente ou encore que les coefficients du dls donnent $f(x_0)$, $f'(x_0)$ et $\frac{f''(x_0)}{2}$.

3 Calculs de développements limités

a) Développements limités usuels

Ces développements limités usuels doivent être connus par coeur. Il se prouvent tous grâce à la formule de Taylor-Young au voisinage de 0 :

Fonction	**DL ordre 2 en** 0	**DL ordre 1 en** 0
exp	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$	$e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$
$x \mapsto (1 + x)^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$	$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o_{x\to 0}(x)$
$x \mapsto \ln(1 + x)$	$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)$	$\ln(1 + x) = x + o_{x\to 0}(x)$

Remarque

Le DL de $\frac{1}{1+x}$ se déduit de $(1+x)^\alpha$ en prenant $\alpha = -1$.
De même les DLS de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ se déduisent de celui de $(1+x)^\alpha$ en prenant respectivement $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Exemples

• Calculons le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \sqrt{1-x}$:
On reconnait le DL usuel $\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}}$ avec $X = -x \underset{x\to 0}{\to} 0$.
$\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} - 1)X^2 + o_{X\to 0}(X^2) = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o_{X\to 0}(X^2)$ donc :
$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x\to 0}(x^2)$.

• Calculons le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$:
On reconnait $\frac{1}{1+X} = (1+X)^{-1}$ avec $X = -x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$.
$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o_{X\to 0}(X^2)$ donc $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o_{x\to 0}(x^4)$. Le DL obtenu est à un ordre trop grand, donc on le tronque pour obtenir un DL d'ordre 2 :
$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$.

b) Calculs de développements limités

En théorie, le programme demande assez peu de maîtrise de calculs sur les développements limités. Voyons tout de même un exemple de calcul de somme, de produit et de composée de DLs.

Pour calculer un développement limité en un point x_0, on effectue la suite d'opérations suivantes :
1) Si on nous demande un dl en $x_0 \neq 0$, on retourne en 0 en utilisant le changement de variable $h = x - x_0 \underset{x\to x_0}{\to} 0$ car en 0 on peut utiliser les développements limités usuels,
2) On trouve le Dl en 0 pour la variable h (on prend toujours le dl à l'ordre 2 de chaque fonction, même si ce n'est pas l'ordre demandé au départ, quitte à tronquer le dl à la fin),
3) puis, une fois le calcul de DL en 0 terminé, on revient à la variable x.

Exemples

• Calculons le DL à l'ordre 2 en 1 de $f(x) = 2\ln x + \frac{3}{x}$

• Calculons le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{1-x}$

• Calculons le DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (1+x)^x$

4 Utilisation des développements limités

a) Trouver des équivalents ou des limites

Les développements limités servent à calculer des équivalents et/ou des limites qui nous posaient problème auparavant, c'est-à-dire quand on n'est pas au bord de l'ensemble de définition des fonctions usuelles et qu'il n'y a donc pas de croissance comparée.

Dans ce cadre, ON NE CHERCHERA PAS LE DL DE TOUTE LA FONCTION . On appliquera la méthode de calcul de limite de la page 10 ; et si jamais un (ou plusieurs) facteur pose problème (que l'on arrive à la partie 4, second •), on calcule alors le développement limité de ce facteur uniquement pour le transformer en une somme avec un terme prépondérant.

Exemple

Déterminons un équivalent simple en 0 de $f(x) = \frac{e^x(\ln(1+x)-x)}{\sqrt{1+2x}-1}$:
$e^x \to 1 \neq 0$ donc $e^x \sim 1$ (pas besoin de dl ici).
$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$.
$\sqrt{1+2x} - 1 = 1 + \frac{1}{2}(2x) + o(x) - 1 = x + o(x) \sim x$
Ainsi, $f(x) \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\frac{x}{2}$.

b) Trouver l'équation de la tangente en x_0 et la position locale de la courbe par rapport à la tangente

Cette partie nécessite le calcul complet du développement limité d'ordre 2 de la fonction .
En effet, l'ordre 1 donne l'équation de la tangente en x_0 : $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (d'après Taylor-Young) et l'ordre 2 donne le signe de $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ donc la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ Déterminons l'équation de la tangente en 1 et la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1 :
• Cherchons le DL d'ordre 2 en 1 de f :
On pose $h = x - 1 \underset{x\to 1}{\to} 0$:
$f(1+h) = \frac{e^{1+h}}{1+h} = ee^h \times \frac{1}{1+h} = e(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2))(1 - h + h^2 + o(h^2)) = e + e\frac{h^2}{2} + o_0(h^2)$.
Donc $f(x) = e + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$.
Or la fonction f est dérivable en 1 donc on sait, par unicité du Dl et par la formule de Taylor-Young que $f(1) = e$, $f'(1) = 0$
L'équation de la tangente en 1 est $y = e$.
Pour déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente on étudie $f(x) - e$:
$f(x) - e = \frac{e}{2}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2) \underset{1}{\sim} \frac{e}{2}(x-1)^2 \geq 0$.
Deux fonctions équivalentes ont même signe au voisinage du point donc la courbe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 1.

c) Trouver l'équation de l'asymptote au voisinage de $\pm\infty$ et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote

C'est le même principe, donc ça nécessite aussi un DL d'ordre 2 au voisinage du point considéré.
Si le changement de variable n'est pas proposé par l'énoncé, lorsque x tend vers $\pm\infty$, on se ramène en 0 en posant le changement de variable $h = \frac{1}{x}$ (mais il peut arriver que l'énoncé propose un autre changement de variable comme $h = -\frac{1}{x}$ ou $h = \frac{1}{x^2}$ ou ....).

Méthode : calculs de limites de fonctions "standard"

Pour étudier la limite d'une fonction, on applique les points suivants, dans l'ordre :

1. On tente de conclure avec les opérations élémentaires et les croissances comparées.
   Sinon, on regarde précisément le point où la limite est cherchée : si c'est un nombre a **fini** non nul, on se ramène immédiatement en 0 avec le changement de variable :
   $$h = x - a$$

2. En cas de forme indéterminée, on factorise au maximum la fonction (**factorisations réelles**) et on simplifie, puis on essaie à nouveau de conclure par les opérations élémentaires et les croissances comparées.

3. S'il y a encore une indétermination, on factorise les <u>sommes</u> par leurs termes prépondérants (parfois à l'intérieur d'une fonction comme ln, une racine ou une puissance, puis à l'extérieur) et on simplifie, puis on essaie à nouveau de conclure par les opérations élémentaires et les croissances comparées.

4. Si une somme n'a pas de terme prépondérant ou s'il y a encore un problème, on regarde s'il y a une expression du type $\exp(f(x))$ ou $\ln(f(x))$ dans la somme :
   • Si c'est le cas, on regarde la limite de $f(x)$ (i.e. de ce qu'il y a à l'intérieur de l'exp (respectivement du ln)) : si $f(x)$ tend vers un bord de l'ensemble de définition de exp i.e. $\pm\infty$ (respectivement 0 ou $+\infty$ dans le cas du ln) : on pose le changement de variable $u = f(x)$ dans le but de faire apparaître une croissance comparée.
   • dans les autres cas : pas d'exp et de ln ou bien l'intérieur de ces fonctions tend vers une valeur de l'ensemble de définition : les factorisations précédentes ont dû permettre de faire apparaître un DL (en x ou bien en posant le bon changement de variable $h = ...$ qui tend vers 0 ! ! !).
   On effectue alors les DL (y penser notamment pour e^h et $\ln(1+h)$) et on simplifie au maximum.
   Attention, le DL ne permet pas de conclure ! Il sert à faire apparaître une somme avec un terme prépondérant, et on se ramène au point précédent pour essayer de conclure.

5. <u>Cas très particulier :</u> Si on a une forme indéterminée avec une forme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut simplifier un peu l'étude en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$: on a alors :
   $$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
   et les racines sont enlevées dans la forme indéterminée $a-b$ (qui a donc une chance de se simplifier), tandis que le dénominateur avec les racines ne pose plus problème .