Chapitre 5
Applications linéaires

Dans ce chapitre, on note E et F deux espaces vectoriels.
On s'intéresse aux applications de E dans F :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{u} & \mapsto & f(\vec{u}) \end{array}$$

I Applications linéaires entre deux espaces vectoriels

1 Définitions et premières propriétés

a) Définitions

Définition 1

Soit f une application de E dans F.
On dit que f est ***linéaire*** *(ou est un morphisme d'espace vectoriels) si :*

$$\begin{cases} \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \qquad\qquad et \\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall\vec{u} \in E,\ f(\lambda.\vec{u}) = \lambda.f(\vec{u}) \end{cases}$$

Notation : On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Contre-exemples

1) La fonction exp n'est pas linéaire : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \neq \exp(x) + \exp(y)$ pour $x = y = 0$ par exemple.
En fait, en ce qui concerne les fonctions à variables et à valeurs réelles, seules les fonctions $x \mapsto ax$ sont linéaires.

2) La fonction variance n'est pas linéaire car $V(2X) = 2^2V(X) = 4V(X) \neq 2V(X)$ dès que $V(X) \neq 0$.

Propriété 1

Soit f une application de E dans F. f est linéaire si et seulement si :

$$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda.\vec{u}+\vec{v}) = \lambda.f(\vec{u}) + f(\vec{v})}$$

Exemples fondamentaux

1. La fonction nulle notée $f_0 : \begin{cases} E & \to & F \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{0}_F \end{cases}$ est linéaire.
2. La fonction identité notée $Id_E : \begin{cases} E & \to & E \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{cases}$ est linéaire.
3. La dérivation est linéaire : $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
4. La fonction intégration sur $[a,b]$ $\int_a^b : \begin{cases} \mathcal{C}^0([a,b]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{cases}$ est linéaire.
5. L'espérance est linéaire : pour toutes variables aléatoires X et Y et pour tous réel λ , $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.

Exercice

Démontrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-2y \end{array}$ est linéaire.

Propriété 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- Par récurrence, on montre que : $\forall\ (\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n) \in E^n,\ \forall\ (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \in \mathbb{R}^n, f\Big(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + ... + \lambda_n\vec{u}_n\Big) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \lambda_2 f(\vec{u}_2) + ... + \lambda_n f(\vec{u}_n)$ C'est-à-dire que l'image par f de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Preuve du premier point

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors en particulier, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ on a :

$$f(0\vec{x}) = 0f(\vec{x}) \textbf{ c'est-à-dire } f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

car dans tout espace vectoriel, si on multiplie un vecteur par le scalaire 0, on obtient le vecteur nul de l'espace.

Définition 2 : vocabulaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- *Si $F = E$ (c'est-à-dire que f est une application linéaire de E dans lui-même), on dit que f est un **endomorphisme de E**.*
  Notation : On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

- *Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.*

- *Si $F = E$ et f est bijective, on dit que f est un **automorphisme de E.***
  Notation : On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

b) Opérations sur les applications linéaires

Propriété 3

$L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de E dans F.

Preuve

- $L(E,F) \subset \mathcal{F}(E,F)$.
- Soit f la fonction nulle de E dans F, c'est-à-dire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{0}_F \end{array} \right.$ est bien linéaire.
- Soient $(f,g) \in L(E,F)$. Montrons que $f+g \in L(E,F)$:
  Soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
(f+g)(\lambda\vec{u}+\vec{v}) &= f(\lambda\vec{u}+\vec{v})+g(\lambda\vec{u}+\vec{v}) \text{ (par définition d'une somme de fonctions)}\\
&= \lambda f(\vec{u})+f(\vec{v})+\lambda g(\vec{u})+g(\vec{v}) \text{ (car } f \text{ et } g \text{ sont linéaires)}\\
&= \lambda f(\vec{u})+\lambda g(\vec{u})+f(\vec{v})+g(\vec{v})\\
&= \lambda(f(\vec{u})+g(\vec{u}))+(f(\vec{v})+g(\vec{v})) \text{ (en factorisant par } \lambda)\\
&= \lambda(f+g)(\vec{u})+(f+g)(\vec{v}) \text{ (par définition d'une somme de fonctions)}
\end{aligned}$$

— Soient $(a,f)\in\mathbb{R}\times L(E,F)$, montrons que $a.f\in L(E,F)$:
Soient $(\vec{u},\vec{v})\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
(af)(\lambda\vec{u}+\vec{v}) &= a(f(\lambda\vec{u}+\vec{v})) \text{ (par définition d'une multiplication d'une fonction par un scalaire)}\\
&= a(\lambda f(\vec{u})+f(\vec{v})) \text{ (car } f \text{ est linéaire)}\\
&= a\lambda f(\vec{u})+af(\vec{v})\\
&= \lambda af(\vec{u})+af(\vec{v}) \text{ (en factorisant par } \lambda \text{)}\\
&= \lambda(af)(\vec{u})+(af)(\vec{v}) \text{ (par définition d'une multiplication d'une fonction par un scalaire)}
\end{aligned}$$

Propriété 4

Soient E, F et G des espaces vectoriels.
Soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$ alors $g\circ f\in\mathcal{L}(E,G)$.

Preuve

Soient $(\vec{u},\vec{v})\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(\lambda\vec{u}+\vec{v}) &= g\left(f(\lambda\vec{u}+\vec{v})\right) \text{ (par définition d'une composée)}\\
&= g\left(\lambda f(\vec{u})+f(\vec{v})\right) \text{ (par linéarité de la fonction } f)\\
&= \lambda g\left(f(\vec{u})\right)+g\left(f(\vec{v})\right) \text{ (par linéarité de la fonction } g)\\
&= \lambda(g\circ f)(\vec{u})+(g\circ f)(\vec{v}) \text{ (par définition d'une composée)}
\end{aligned}$$

Donc $g\circ f$ est linéaire.

Propriété 5

Soit f un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est linéaire.

Preuve

Soient $(\vec{u},\vec{v})\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
Montrons que $f^{-1}(\lambda\vec{u}+\vec{v})=\lambda f^{-1}(\vec{u})+f^{-1}(\vec{v})$:
Méthode : comme on ne connait rien sur f^{-1}, on va utiliser ce que l'on sait sur f en composant par f.
On va montrer que leurs images par f sont égales puis on conclura par injectivité de f :

- $$\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(\lambda\vec{u}+\vec{v})\right) &= (f\circ f^{-1})(\lambda\vec{u}+\vec{v}) \text{ (par définition d'une composée)}\\
&= Id_F(\lambda\vec{u}+\vec{v}) \text{ (par définition d'une bijection réciproque)}\\
&= \lambda\vec{u}+\vec{v}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
f\left(\lambda f^{-1}(\vec{u})+f^{-1}(\vec{v})\right) &= \lambda f\left(f^{-1}(\vec{u})\right)+f\left(f^{-1}(\vec{v})\right) \text{ (par linéarité de } f) \text{)}\\
&= \lambda(f\circ f^{-1})(\vec{u})+(f\circ f^{-1})(\vec{v}) \text{ (par définition d'une composée)}\\
&= \lambda\vec{u}+.\vec{v} \text{ (par définition d'une bijection réciproque)}
\end{aligned}$$

On remarque ainsi que $f\left(f^{-1}(\lambda\vec{u}+\vec{v})\right)=f\left(\lambda f^{-1}(\vec{u})+f^{-1}(\vec{v})\right)$ et donc par injectivité de f :

$$f^{-1}(\lambda\vec{u}+\vec{v})=\lambda f^{-1}(\vec{u})+f^{-1}(\vec{v})$$

c) Puissances d'un endomorphisme et polynômes annulateurs

Définition 3

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note :
- $f^0 = Id_E$ *(par convention).*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ *(n fois).*

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$.

De plus, ***si f est bijective*** *alors f^n est bijective de bijection réciproque $(f^{-1})^n$. On note f^{-n} sa réciproque. Ainsi, :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{-n} = (f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$$

Si f est bijective alors, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (-x - y - z, -x, 2x + z)$. Montrer que $f^3 = -Id$.

Définition 4 : polynôme d'endomorphisme

Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ un polynôme.
Soit $f \in L(E)$. On note $P(f)$ la fonction $P(f) = a_nf^n + a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_1f + a_0Id_E$.

Exemple
Soit f l'endomorphisme de l'exemple précédent et P le polynôme défini par $P(x) = x^3 + 1$.
Déterminer $P(f)$.

Définition 5 : polynôme annulateur

On dit qu'un polynôme P est ***polynôme annulateur*** *de l'endomorphisme f si $P(f)$ est la fonction nulle.*

Exemple
Le polynôme $P(X) = X^3 + 1$ est un polynôme annulateur de la fonction f de l'exemple ci-dessus.

2 Noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a) Définition

Définition 6

On appelle noyau de f et on note $\ker f$ (pour kernel, qui signifie noyau en anglais) l'ensemble :

$$\boxed{\ker f = \left\{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_F\right\}}$$

C'est l'ensemble des solutions de l'équation $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$, ou encore l'ensemble des antécédents de $\vec{0}_F$ par f.

Propriété 6

$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

- $\ker f \subset E$.
- $\vec{0}_E \in \ker f$ car $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ (car f est linéaire).
- soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in \ker f^2$, montrons que $\vec{u} + \vec{v} \in \ker f$:

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{u}+\vec{v}) & = & f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \text{ (par linéarité de } f) \\ & = & \vec{0}_F + \vec{0}_F \text{ (car } (\vec{u}, \vec{v}) \in \ker f^2) \\ & = & \vec{0}_F \end{array}$$

  Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} \in \ker f$.
- soient $(\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times \ker f$, montrons que $\lambda\vec{u} \in \ker f$:

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda\vec{u}) & = & \lambda f(\vec{u}) \text{ (par linéarité de } f) \\ & = & \lambda\vec{0}_F \text{ (car } \vec{u} \in \ker f) \\ & = & \vec{0}_F \end{array}$$

  Ainsi, $\lambda\vec{u} \in \ker f$.

Methode

Pour déterminer le noyau de f, on résout l'équation $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$, d'inconnue $\vec{u} \in E$.

Exemple

Déterminer la dimension du noyau de f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x - 2y \end{array}$.

b) Lien avec l'injectivité

Rappels : application injective

Soit f une application de E dans F. On dit que f est injective si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Ce qui signifie que tout élément de $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f.

Propriété 7

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \ker f = \{\vec{0}_E\}.}$

Preuve

$\Rightarrow$:
Supposons que f est injective, alors, par définition de l'injectivité l'équation $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$ admet au plus une solution $\vec{u}$ dans E. Or $\vec{0}_E$ est solution car f est linéaire donc c'est l'unique solution . Ainsi, $\ker f = \{\vec{0}_E\}$.

$\Leftarrow$:
Supposons que $\ker f = \{\vec{0}_E\}$. Vérifions alors si f est injective :
Supposons qu'il existe 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$. Mettons l'équation sous la forme $= \vec{0}_F$ pour utiliser l'hypothèse sur le noyau :
On a $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ donc $f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}_F$ donc $f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_F$ par linéarité de f. Ainsi, $\vec{u} - \vec{v} \in \ker f$ or $\ker f = \{\vec{0}_E\}$ donc $\vec{u} - \vec{v} = \{\vec{0}_E\}$ c'est-à-dire $\vec{u} = \vec{v}$.

Methode
Pour déterminer si une application linéaire est injective, on détermine son noyau.
S'il est réduit à $\vec{0}_E$, alors f est injective. Sinon, f n'est pas injective.

Exemple
L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x - 2y \end{array}$ est-elle injective ?

3 Image d'une application linéaire

a) Définition

Définition 7

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Im} f = f(E) &= \left\{\vec{v} \in F \;\middle|\; \exists \vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{v}\right\} \\ &= \left\{f(\vec{u}) \;\middle|\; \vec{u} \in E\right\} \end{aligned}}$$

C'est l'ensemble des valeurs $\vec{v} \in F$ atteintes par la fonction f, ou encore l'ensemble des images des éléments de E.

Propriété 8

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve

- $\operatorname{Im} f \subset F$.
- $\vec{0}_F \in Imf$ car $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- Soient $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \operatorname{Im} f^2$. Montrons que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \operatorname{Im} f$:
  On sait que $\vec{v}_1 \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $\vec{u}_1 \in E$ tel que $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1$.
  De même $\vec{v}_2 \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $\vec{u}_2 \in E$ tel que $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$.
  Alors $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) = f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ par linéarité de f. Ainsi, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \operatorname{Im} f$.
- Soient $(\lambda, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \operatorname{Im} f$. Montrons que $\lambda\vec{v} \in \operatorname{Im} f$:
  On sait que $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{v}$.
  Alors, $\lambda\vec{v} = \lambda f(\vec{u}) = f(\lambda\vec{u})$ par linéarité de f. Ainsi, $\lambda\vec{v} \in \operatorname{Im} f$.

Propriété 9 : Calcul de l'image.

Soit E un espace de dimension finie dont $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base, alors la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. C'est-à-dire :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)]}$$

Preuve

Explication détaillée : Soit $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$ alors il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$.
Or $\vec{u} \in E$ et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E donc il existe des réels $(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$.
Ainsi, $\vec{v} = f(\vec{u}) = f(\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n) = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(\vec{e}_n)$ par linéarité de f.
Ainsi, la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est bien une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Preuve rapide :$\operatorname{Im} f = \{f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in E\} = \{f(\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots \lambda_n\vec{e}_n) \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$

$\operatorname{Im} f = \{\lambda_1 f(\vec{e}_1) + \dots \lambda_n f(\vec{e}_n) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$

donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)]}$.

Remarque
On remarque que si E est de dimension finie n alors $\operatorname{Im} f$ est forcément de dimension finie et même inférieure à n.

Exemple
Déterminer une base de l'image de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + y, 0)$.

b) Lien avec la surjectivité

Rappels : application surjective
Soit f une application de E dans F. On dit que f est surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Ce qui signifie que tout élément de $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f.

Propriété 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } \operatorname{Im} f = F.}$

Preuve
C'est une conséquence directe de la surjectivité.
• Par définition de l'image, $\operatorname{Im} f \subset F$.
• Montrons que $F \subset \operatorname{Im} f$: Soit $\vec{v} \in F$, f étant surjective, on sait que $\vec{v}$ admet au moins un antécédent $\vec{u} \in E$ donc $\vec{v} = f(\vec{u})$. Ainsi, $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$.

Exemple
L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + y, 0)$ est-il surjectif ?

4 Rang d'une application linéaire

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel de dimension finie $n = dim(E)$. On note $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

a) Définition

Définition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
*On appelle **rang** de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de l'image de f :*

$$\boxed{\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)}$$

Propriété 11

Le rang de f est le rang de la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$.

Preuve

rg $f = \dim(\text{Im } f)$ or $\text{Im } f = \text{Vect}[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)]$ d'après la propriété 9, donc $rgf = \dim\left(\text{Vect}[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)]\right)$ ce qui est la définition du rang de la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n))$.

b) Théorème du rang

Théorème 12 fondamental (admis)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\boxed{\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E)}$$

ou encore :

$$\boxed{\dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = n}$$

Remarque

Ce théorème très important permet, lorsqu'on connaît déjà le noyau d'une application linéaire, de déterminer la dimension de l'image, facilitant le calcul de celle-ci.

c) Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Propriété 13

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est un isomorphisme alors $dim(E) = dim(F)$.

Preuve

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E)$.

Or si f est un bijective alors :
- f est injective donc $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$ d'où $\dim(\text{Ker } f) = 0$.
- f est surjective donc $\text{Im } f = F$ d'où $\dim(\text{Im } f) = \dim(F)$.

Ainsi, le théorème du rang donne $0 + \dim(F) = \dim(E)$.

Théorème 14

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec $\dim(E) = \dim(F)$. On a alors :

$$\boxed{f \text{ isomorphisme} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective}}$$

- En particulier, $f \in \mathcal{L}(E)$ bijectif $\Leftrightarrow$ f injectif $\Leftrightarrow$ f surjectif.

Preuve

- Montrons $finjective \Rightarrow fsurjective$:

Supposons que f est injective alors $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$ d'où $\dim(\text{Ker } f) = 0$. Le théorème du rang donne alors $0 + dim(\text{Im } f) = dim(E)$ donc $\dim(\text{Im } f) = dim(F)$ par hypothèse du théorème.

On a alors : $\begin{cases} \text{Im } f \text{ est un sous espace vectoriel de } F \\ \dim(\text{Im } f) = dim(F) \end{cases}$ donc $\text{Im } f = F$ donc f est surjective.

- Montrons $fsurjective \Rightarrow finjective$:

Supposons que f est surjective alors $\text{Im } f = F$. Le théorème du rang donne alors $\dim(\ker f) + dim(F) = dim(E)$ donc $\dim(\ker f) + dim(E) = dim(E)$ par hypothèse du théorème donc $\dim(\ker f) = 0$.

Ainsi, $\ker f = \{\vec{0}_E\}$ donc f est injective.

Exemple

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + y, 0)$ n'est pas surjectif donc il n'est pas injectif.

II Matrice d'une application linéaire dans des bases

Dans ce chapitre, nous allons voir que toute application linéaire peut être représentée en calculs matriciels par une application de la forme $\phi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Tout problème linéaire pourra donc être résolu par calcul matriciel.

1 Matrice d'une application linéaire dans le cas $E \neq F$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie p, $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \ \dots \ , \vec{b}_p)$ une base de E, F un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \ \dots \ , \vec{c}_n)$ une base de F .

Définition 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de la famille $(f(\vec{b}_1), f(\vec{b}_2), ..., f(\vec{b}_p))$ dans la base $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \ \dots \ , \vec{c}_n)$.

$$\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(\vec{b}_1) & . \quad . & f(\vec{b}_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \vec{c}_n \end{array} \end{array}}$$

Cette matrice appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ car elle a n lignes (comme le nombre de vecteurs de la base de F) et p colonnes (comme le nombre de vecteurs de la base de E).

Exemple

On pose f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \to & (x + 2y + z, x - z) \end{array}$

1. Matrice de f dans les bases canoniques :

2. Matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = [(1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1)]$ et $\mathcal{C} = [(1, 1), (-1, 1)]$:

2 Matrice d'un endomorphisme

Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$ de dimension finie n), on prend toujours la même base $\mathcal{B}$ de E au départ et à l'arrivée :

Définition 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Cette matrice appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples

1. Pour toute base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$ de E, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$:

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (3x + y - 2z, y + z, 2z)$.
   Matrices de f dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B} = [(1, 0, 0), (1, -2, 0), (1, 1, 1)]$:

Propriété 15

Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice.

3 Caractérisation d'une application linéaire par sa matrice ($\Leftrightarrow$ par l'image d'une base)

Théorème 16

• Soit E un espace vectoriel de dimension p dont on fixe une base $\mathcal{B}$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n dont on fixe une base $\mathcal{C}$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E, F)$ dont A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

• Soit E un espace vectoriel de dimension p dont on fixe une base $\mathcal{B}$.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe un unique endomorphisme $f \in L(E)$ dont A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque

La donnée de la matrice dans une base est équivalente à la donnée de l'image d'une base.
Ce théorème indique donc qu'une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

Preuve sur un exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

• **Analyse (unicité) :** On suppose qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. On connait alors l'image d'une base (de la base canonique) : $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (-1, -1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
Mais comme on connait l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$, on connait l'image de tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ car il s'écrit dans cette famille :
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x, y, z)) = f(x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1)$ (par linéarité de f) $= x(1, 1, 0) + y(-1, -1, 0) + z(1, 1, 1) = (x - y + z, x - y + z, z)$.
Ainsi, f est unique .

• **Synthèse (existence) :** Il suffit de vérifier que l'application ci-trouvée est linéaire.

Methode : Montrer que 2 applications linéaires sont égales
Pour prouver que deux applications linéaires u et v sont égales, on prouve que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v)$.

4 Utilisation de la matrice pour calculer des images et des antécédents

Propriété 17 : Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par un endomorphisme

Soit E un e.v. muni d'une base $\mathcal{B}$; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$; soit $\vec{x} \in E$ et $X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{x})$.
Alors :

$$\boxed{Y = AX \text{ est la matrice dans la base } \mathcal{B} \text{ de } \vec{y} = f(\vec{x})}$$

Methode calcul d'une image d'un vecteur ou du noyau de f
La propriété précédente indique que si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, alors f est représentée par la fonction $\Phi_A : X \mapsto AX$ lorsque l'on fait des calculs de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Lorsque l'on connait une matrice A de f . Pour faire un calcul sur f : :
1. On fait le calcul correspondant sur Φ_A (calculs matriciels donc plus simples) :
2. On en déduit les solutions sur la fonction f en donnant les vecteurs dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont les solutions de 1.

Exemple
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique.

1. Calculer $f(1 + X + X^2)$, $f(2X^2 - 3)$.
2. Déterminer $\ker f$.

5 Opérations sur les matrices

a) Combinaisons linéaires

Propriété 18

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$, E et F étant munis des bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On a :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f+\mu g)=\lambda Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)+\mu Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)}$$

Remarque

On en déduit que l'application Φ : $\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\\ f & \to & Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\end{array}$ est linéaire.
On sait de plus qu'à une matrice quelconque correspond une unique application linéaire dont elle est la matrice dans des bases données (théorème 16) , ce qui assure que l'application est bijective : c'est donc un isomorphisme.
On en tire alors le résultat suivant :

$$\boxed{\dim(\mathcal{L}(E,F))=\dim\mathcal{M}_{\dim F,\dim E}(\mathbb{R})=\dim E\times\dim F}$$

b) Composée

Propriété 19 : matrice d'une composée d'endomorphismes

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$, E étant muni de la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(g\circ f)=Mat_{\mathcal{B}}(g)\ \times Mat_{\mathcal{B}}(f)}$$

Remarques

1. Attention, en général $g\circ f\neq f\circ g$ et $AB\neq BA$; il faut faire attention à ne pas changer l'ordre quand on passe des composées d'applications linéaires aux produits de matrices.

2. On retiendra qu'à la composée des endomorphismes correspond le produit des matrices.

c) Isomorphismes et réciproques

Propriété 20

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ un isomorphisme, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ de f est inversible et :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1})=\left[Mat_{\mathcal{B}}(f)\right]^{-1}}$$

La réciproque est aussi vraie, et on a donc la propriété générale :

$$\boxed{f \text{ isomorphisme} \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(f) \text{ inversible}}$$

Preuve

f est un isomorphisme de E si et seulement si il existe $f^{-1}\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=Id_E$ si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(f\circ f^{-1})=Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}\circ f)=Mat_{\mathcal{B}}(Id_E)$, si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1})=Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1})Mat_{\mathcal{B}}(f)=I$, si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible d'inverse $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Exemple

Soit E un espace vectoriel dont $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une base.

Soient f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-2\end{pmatrix}$.

Justifier que f est bijective et déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
Prouver que $f\circ g-g\circ f^{-1}=Id_E$.

6 Endomorphismes et changement de base

a) La formule de changement de base

Propriété 21

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. On a pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$$

On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ alors :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P$$

Ainsi, deux matrices d'un même endomorphisme sont semblables.

Remarque

1. Cette formule, qu'on peut retenir en remarquant "l'homogénéité des $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$" (comme une sorte de relation de Chasles), sera capitale dans l'étude de la diagonalisation et sera utilisée dans tous les sujets de concours : elle devra absolument être connue et son utilisation comprise.
2. En pratique, cette formule ne sert PAS à calculer $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ (on revient à la définition de cette matrice pour la calculer). En revanche, elle sert à écrire une relation entre 2 matrices d'une même application linéaire, précédemment calculées.

Théorème 22 : (admis)

Réciproquement, si deux matrices sont semblables, alors elles peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.