Chapitre 3
Compléments sur les séries

Il existe très peu de séries dont on sait calculer la somme. Seules les séries s'exprimant à l'aide des quelques séries de références peuvent être calculées.
Nous allons donc compléter les compétences sur les séries en introduisant des théorèmes permettant de trouver la nature d'une série, même si on ne sait pas calculer sa somme.

I Rappels sur les séries et séries de référence

1 Convergence d'une série

Définition 1

• *On dit que la* ***suite de terme général*** $(u_n)_{n\geq n_0}$ *(ou* u_n*) converge si* u_n *a une limite finie lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

• *On dit que la* ***série de terme général*** $(u_n)_{n\geq n_0}$ *(ou* u_n*) converge si la suite des sommes partielles* $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ *a une limite finie lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

On note alors $\sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemples

1. La suite de terme général $u_n = 1$ converge vers 1 mais la série de terme général $u_n = 1$ diverge : en effet, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
2. La suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ existe et est finie, et pourtant la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$: $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$.

2 Les séries de référence

(a) Les séries de référence dont on sait calculer la somme

Théorème 1 : les séries géométriques

La série de terme général x^n, appelée **série géométrique de raison** x,
la série de terme général nx^{n-1} appelée **série géométrique dérivée de raison** x et
la série de terme général $n(n-1)x^{n-2}$, appelée **série géométrique dérivée seconde de raison** x
convergent si et seulement si $\mathbf{-1 < x < 1}$, et alors :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{+\infty} x^k = x^a \frac{1}{1-x}}, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}}, \quad \boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}}$$

Remarque

Attention à ne pas confondre somme infinie $\sum\limits_{k=n0}^{+\infty} u_k$ et somme finie $\sum\limits_{k=n0}^{n} u_k$! Une somme finie $\sum\limits_{k=n0}^{n} u_k$ existe toujours, alors qu'une somme infinie n'existe que si $\sum\limits_{k=n0}^{n} u_k$ converge lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemples

1. si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum\limits_{k=a}^{b} x^k = x^a \frac{1-x^{b-a+1}}{1-x}$

2. Calculons $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
   On ne connait que la somme (infinie) d'une série géométrique dérivées, et uniquement si $|x| < 1$. Ce n'est donc pas cette formule qu'on peut utiliser.
   La somme finie n'est pas une somme usuelles
   Pour la calculer, il faut utiliser la somme des termes jusqu'à n d'une suite géométrique et dériver les expressions en fonction de x :
   On sait que $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Or g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car polynômiale, on la dérive donc :$g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Théorème 2 : les séries exponentielles

Pour tout réel x, la série dite **série exponentielle** de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

Méthode

Pour que l'on puisse calculer une somme infinie, il faut soit qu'elle s'exprime en fonction de séries usuelles, soit que la série se télescope.

Exemples

1. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1+2^k}{4^k}$.
   Implicitement, on ne demande de vérifier l'existence de la somme infinie (justifier que la série converge) puis de la calculer :
   On calcule les sommes partielles :
   $\forall n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1+2^k}{4^k} = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{4^k} + \frac{2^k}{4^k}\right) = \sum\limits_{k=2}^{n} \left((\frac{1}{4})^k + (\frac{1}{2})^k\right) = \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{4})^k + \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{2})^k$. On reconnait les sommes partielles de séries géométriques de raisons 1/4 et 1/2 comprises dans $]-1,1[$ donc la série converge.
   On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient :
   $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1+2^k}{4^k} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}$.

2. Calculer $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ en admettant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:
   $\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=3}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}$ par télescopage.
   Ce terme converge vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
   $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{3}$

(b) Les séries de référence dont on connait juste la convergence

Théorème 3 : les séries de Riemann

la série dite **série de Riemann** de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Exemples

1. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge aussi.
2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, ainsi que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent.

D'après la méthode ci-dessus, il n'y a que très peu de séries dont on sait calculer la somme. Pourtant, on saura trouver la nature de beaucoup de séries, même si on ne sait pas calculer leur somme, grâce aux théorèmes de la partie suivante :

II Etude de la nature d'une série

1 Divergence grossière

Théorème 4 : divergence grossière

Si le terme général (u_n) ne converge pas vers 0, alors

$$\boxed{\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ diverge.}}$$

On dit alors qu'elle **diverge grossièrement**.

Preuve

Montrons la contraposée :

On suppose que $\sum_{k \geq n_0} u_k$ converge vers un réel l, c'est-à-dire que les sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ convergent vers l.

Montrons que u_n tend vers 0 :

Pour cela, il faut exprimer u_n en fonction de S_n : par télescopage on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc u_n converge vers $l - l = 0$.

Exemple

Si $|x| \geq 1$ alors $\sum x^n$ diverge grossièrement car (x^n) ne tend pas vers 0.

Remarque

Le théorème ci-dessus ne sert qu'à montrer qu'une série diverge ! (si le terme général ne tend pas vers 0).

En revanche, la réciproque est fausse. Si le terme général tend vers 0, on ne sait rien :

Exemple : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors que $\frac{1}{n} \to 0$ mais la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Dans le cas où le terme général tend vers 0, il faudra poursuivre l'étude en utilisant les théorèmes suivants :

2 Théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'aux séries à **termes positifs**. Nous verrons ultérieurement comment étudier une série dont le terme général change de signe.

a) Avec des inégalités

Théorème 5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**, telles que pour tout n à partir d'un certain rang N on ait $u_n \leq v_n$.

On a alors :

$$\boxed{\text{Si } \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \text{ converge, alors } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\text{Si } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ diverge, alors } \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \text{ diverge.}}$$

Preuve

On utilise le fait qu'une série $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ à terme général positif est croissante (par télescopage $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$).

Ainsi, il suffit de vérifier qu'elle est majorée or $S_n = \sum_{k=n_0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} v_k$. Donc si $\sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$ converge, alors $S_n \leq \sum_{k=n_0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{+\infty} v_k = constante.$

Ainsi, (S_n) est croissante et majorée donc elle converge.

Remarques

1. La réciproque est fausse : si la plus petite des deux (ici $\sum u_k$) converge, on ne sait rien sur la plus grande. De même si la plus grande des deux diverge, on ne sait rien sur la plus petite.
2. En pratique, on tente de montrer que le terme général de la série étudiée est plus petit que le terme général d'une série usuelle convergente, ou plus grand que le terme général d'une série usuelle divergente.

Exemple

Démontrer que la série de terme général $u_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!+1}$ converge.

b) Domination

Théorème 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**, telles que $u_n = o(v_n)$.
On a alors :

$$\boxed{\text{Si } \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \text{ converge, alors } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\text{Si } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ diverge, alors } \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \text{ diverge.}}$$

Preuve

Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang : en effet, $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ donc $\frac{u_n}{v_n} \leq 1$ à partir du certain rang.

Le théorème précédent s'applique donc.

Remarques

1. Par contre si la plus petite des deux (ici $\sum u_k$) converge, on ne sait rien sur la plus grande. De même si la plus grande des deux diverge, on ne sait rien sur la plus petite.
2. En pratique, on tente de montrer que le terme général de la série étudiée est négligeable par rapport au terme général d'une série usuelle convergente (souvent $\frac{1}{n^2}$).

Exemple

Démontrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge.

c) Equivalence

Théorème 7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **à termes positifs**, telles que $u_n \sim v_n$ en $+\infty$.
On a alors :

$$\boxed{\text{Alors les séries } \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k \text{ et } \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ sont de même nature.}}$$

Preuve

Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n)$. donc si $\sum v_n$ converge, alors $\sum o(v_n)$ converge d'après le théorème précédent donc $\sum u_n$ converge.

Par symétrie de l'équivalence, la réciproque est vraie.

Remarque

Ce théorème est plus fort que les précédents : il suffit de connaître la nature de l'une pour avoir la nature de l'autre. Ceci vient du fait que l'équivalence est symétrique ($u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$), ce qui n'est pas le cas des inégalités ou de la domination.

Exemple

Démontrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge.

3 Convergence absolue

Théorème 8 et définition (ADMIS)

Soit $\sum_{k \geq n_0} u_k$ une série telle que $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |u_k|$ converge. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \text{ converge.}}$$

On dit alors que la série $\sum_{k \geq n_0} u_k$ **converge absolument**.

Méthode

Si la série $\sum u_n$ n'est pas à terme positifs, on utilise les théorèmes de comparaison sur la série $\sum |u_n|$ (qui est bien à termes positifs). En effet, la convergence absolue implique la convergence d'après le théorème précédent.

Exemple

Démontrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Remarque

La réciproque est fausse . Une série peut converger sans converger absolument. On dit alors qu'elle est semi-convergente.
Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.