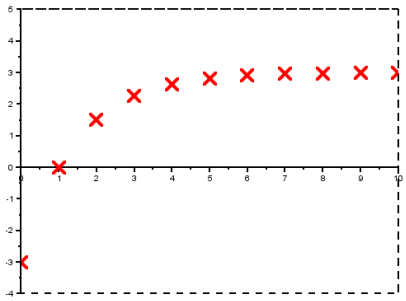
Chapitre 4 : suites récurrentes

I Généralités sur les suites

1 Définition et différents types de suites

• **Définition et représentation :** Une suite est une fonction définie sur les entiers naturels (ensemble discret), et à valeurs réelles : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}\right.$.
On peut donc la représenter sur un graphe :
Exemple : Graphe de la suite définie par $u_n = 3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$:



La seule différence avec les fonctions définies sur un intervalle (ou plus généralement sur un ensemble continu) est la suivante : les notions de continuité, de dérivabilité, etc... n'ont pas de sens lorsque l'ensemble de définition est discret.
En revanche, la notion de variations a toujours du sens, il s'agit de comparer un terme u_n avec le terme suivant u_{n+1}.
Aussi, on peut faire tendre n vers l'infini et donc la notion de limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ a un sens.

Dans l'étude des suites, on s'intéresse donc toujours aux même notions : existence de la suite, variations, limite (lorsque n tend vers $+\infty$) et éventuellement, équivalent de la suite (lorsque n tend vers $+\infty$).

• **Suites définies explicitement :** Une suite est dite explicite lorsque l'on a directement l'expression de u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$: Par exemple, la suite définie par $u_n = 3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On connait alors directement u_{100}, u_{1000}, etc...

Mais les suites peuvent être définies autrement. Il faudra connaître les méthodes d'étude très différentes de 3 types de suites : les suites définies par récurrence, les suites définies implicitement et les suites définies par une intégrale :

• **Suites définies par récurrence :** Une suite récurrente est une suite dont on donne le / les premiers termes et un procédé (une relation de récurrence) permettant de calculer u_n à partir des termes précédents .
Exemples

1. La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$ est une suite récurrente d'ordre 1.

2. La suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + \ln(u_{n+1})$ est une suite récurrente d'ordre 2.

Dans ce chapitre on étudiera les suites récurrentes d'ordre 1 (partie II du cours).

• **Suites définies implicitement :** Une suite implicite est une suite (u_n) de réels dont on connait l'existence comme solution d'une équation mais que l'on ne connait pas explicitement (cf td II).
Exemple
La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
L'existence des solutions de ces équations est assurée par le théorème de la bijection, mais on ne connait pas leur valeur.

• **Suites définies par une intégrale :** Une suite intégrale est une suite dont chaque terme est une intégrale (cf chapitre intégrale sur un segment).

Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

2 Les théorèmes à connaître sur les suites

a) Théorèmes valables uniquement si l'on suppose que (u_n) a une limite (qui ne prouvent absolument pas que (u_n) a une limite)

Théorème 1 : limite des sous-suites d'une suite qui tend vers l

Si la suite (u_n) admet une limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors pour toute fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, la suite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers la même limite l.

Exemple

Si (u_n) converge vers 3 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1} = 3$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2+1} = 3$ ...etc... idem pour toutes les sous-suites de la suite (u_n).

Théorème 2 : passage à la limite dans les inégalités

Soient deux suites (u_n) et (v_n) admettant des limites l_u et l_v :
• Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0, alors $l_u \leq l_v$.
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang n_0, alors $l_u \leq l_v$.

Attention, ce théorème nécessite de savoir au préalable que les suites ont une limite. Il ne prouve pas une convergence !
Il faut retenir que le passage à la limite dans les inégalités transforme les inégalités (strictes et larges) en inégalités larges !

Méthode

On utilise ce théorème lorsque l'on a déjà majoré, minoré ou encadré une suite pour déterminer dans quel intervalle se trouvent les limites possibles de la suite (u_n) .
Par exemple, si on a prouvé : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < u_n < b$ alors si (u_n) tend vers l, on a forcément $a \leq l \leq b$.
Avoir ce réflexe permet d'éliminer les limites possibles (souvent trouvées par théorème du point fixe) qui n'appartiennent pas au bon intervalle.

b) Théorèmes prouvant l'existence d'une limite

Théorème 3 : théorèmes d'encadrement et de comparaison

• Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0 .
S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim v_n = \lim w_n = l$ alors (u_n) converge également vers la même limite l.

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .
Si $\lim v_n = -\infty$ alors u_n tend aussi vers $-\infty$.
Si $\lim u_n = +\infty$ alors v_n tend aussi vers $+\infty$.

Penser à vérifier si on peut utiliser ce théorème dès qu'on a majoré, minoré ou encadré une suite (même si la plupart du temps on ne pourra que faire un passage à la limite si (u_n) converge mais pas utiliser ces théorèmes d'existence d'une limite).

Théorème 4 : théorèmes de la limite monotone

• Toute suite croissante et majorée (par une constante M) converge. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Attention, la suite ne tend pas forcément vers M. Ce théorème prouve l'existence d'une limite mais sans donner sa valeur !

• Toute suite décroissante et minorée (par une constante m) converge. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

II Méthodes d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

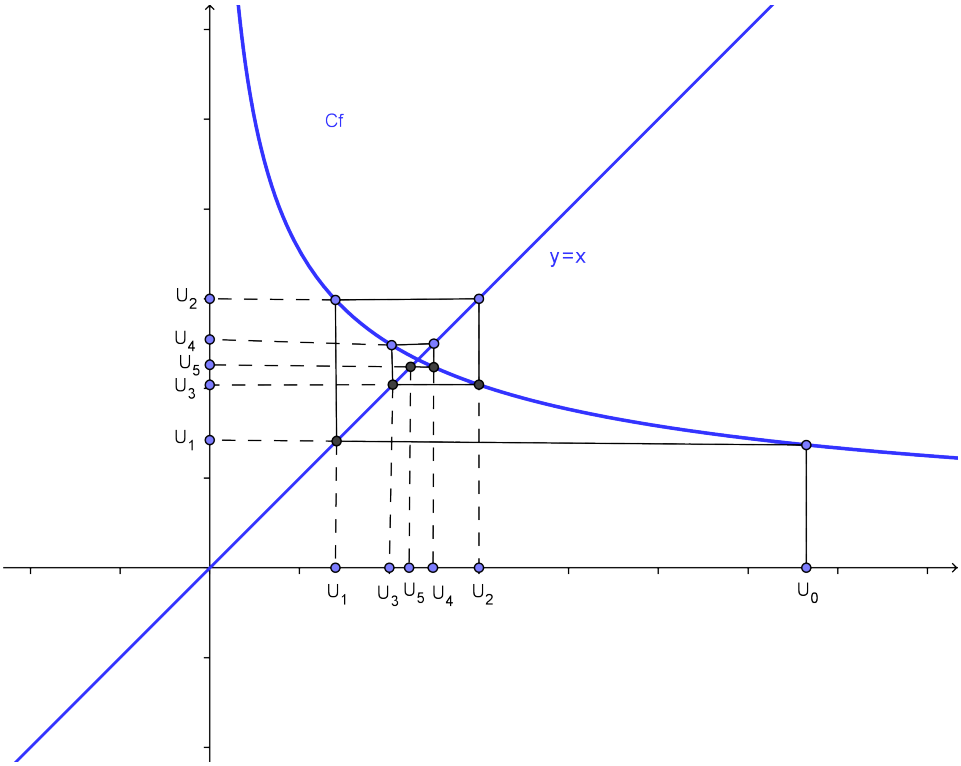
Dans cette partie nous allons présenter les méthodes d'étude des suites définies par une récurrence d'ordre 1 de la forme : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ utilisant l'étude de la fonction f et/ou la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

Il faudra alors savoir repérer quelles propriétés de ces fonctions servent à étudier la suite (u_n) et à quel moment :

1 Construction graphique

Afin d'avoir un aperçu du comportement de la suite, on peut visualiser graphiquement les premiers termes de la suite ainsi :
Sur un graphique, on trace la courbe C_f d'équation $y = f(x)$ et la droite D d'équation $y = x$. Puis :

1. On place u_0 sur l'axe des abscisses,
2. A l'aide de la courbe de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées,
3. Grâce à la droite D, on replace u_1 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur u_1 :
4. A l'aide de la courbe de f, on place $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées,
5. Grâce à la droite D, on replace u_2 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur u_2, ...etc...



On remarque ici que les variations de la fonction f ne coïncident pas avec les variations de la suite (u_n). Ici, f est décroissante, pourtant la suite (u_n) ne l'est pas. En revanche, la suite semble converger vers un point fixe de f (solution de l'équation $f(l) = l$).

2 Existence et encadrement des termes de la suite

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de f :

Contre-exemple

La suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n)$ n'est pas définie car $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$; $u_2 = \ln(\ln(2)) \simeq -0,36$ donc u_3 n'existe pas car u_3 est sorti de l'ensemble de définition de ln.

Pour s'assurer de l'existence de la suite, on choisit donc u_0 dans un intervalle stable par f :

Définition 1 : intervalle stable par f

On appelle intervalle stable par f un intervalle J inclus dans l'ensemble de définition de f qui vérifie : $\boxed{f(J) \subset J}$

Méthode

Pour montrer qu'un intervalle J est stable par f, on dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle J pour obtenir $f(J)$.

Méthode

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in J$. Comment répondre à la question : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in J$?

On montre toujours par **récurrence** la propriété $P(n)$: "u_n existe et $u_n \in J$" :
• Soit on fait une récurrence directe ;
• Soit, si l'hérédité est trop compliquée à démontrer directement, on montre d'abord que J est un intervalle stable par f en étudiant la fonction f sur J, puis on fait la récurrence :

Preuve

• **Initialisation :** $u_0 \in J$ d'après l'énoncé ;
• **Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \in J$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe car $u_n \in J \subset D_f$ et comme $u_n \in J$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(J) \subset J$ car J est stable par f.
• **Conclusion :** Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in J$.

3 Variations de la suite

Il y a trois méthodes possibles pour étudier les variations de la suite (u_n) :

1. On tente d'abord de comparer directement u_n et u_{n+1}, $\forall n \in \mathbb{N}$, et si ce n'est pas trivial, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   Si jamais ce signe est trop compliqué à étudier :

2. On se rappelle qu'ici : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$: on étudie donc le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle J contenant u_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ (en étudiant ses variations pour en déduire son signe si besoin). Il faut d'ailleurs tout de suite penser à cette méthode si on nous a déjà fait comparer $f(x)$ avec x ou étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ dans le sujet :

   Exemples

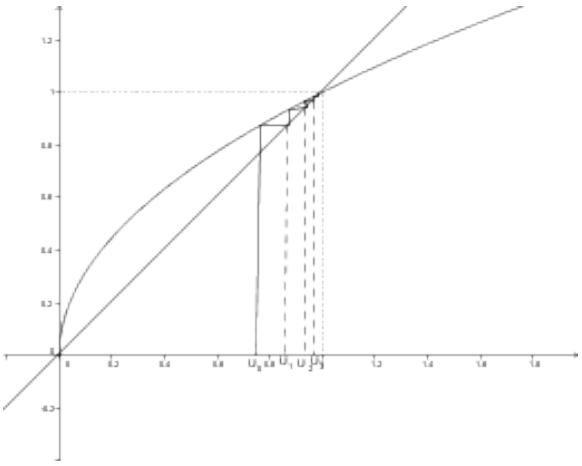
   (a) Soit une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
   Supposons que l'on a montré : $\forall x \in J$, $f(x) \leq x$:
   Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $x = u_n \in J$, dans cette inégalité, on obtient $f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

   (b) Soit une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
   On suppose que l'on a étudié le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J :
   Alors, en posant $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ on retombe sur la fonction g donc on peut utiliser le signe de g pour obtenir le signe de $u_{n+1} - u_n$.

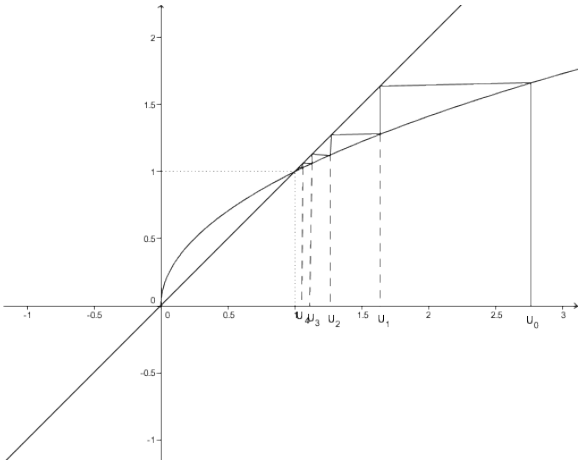
   Si cette méthode n'aboutit pas ou si on nous a fait comparer u_0 et u_1, alors on utilise la dernière méthode :

3. Méthode générale si la fonction f est croissante On remarque visuellement que si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone (mais PAS FORCEMENT croissante) :

   • Si $f(u_0) \geq u_0 \Leftrightarrow u_1 \geq u_0$, la suite restera croissante :



• Si $f(u_0) \leq u_0 \Leftrightarrow u_1 \leq u_0$, la suite restera décroissante :



Méthode
Si la fonction f est croissante, on peut **toujours** prouver par récurrence que la suite (u_n) est monotone :
On compare les deux premiers termes de la suite (généralement u_0 et u_1) puis on montre par récurrence que (u_n) ne changera pas de variations.

En effet,
• si $u_0 \leq u_1$ alors $f(u_0) \leq f(u_1)$ en composant par f croissante donc $u_1 \leq u2$.
Ainsi, $f(u_1) \leq f(u_2)$ en composant par f croissante donc $u_2 \leq u_3$ ...etc ....comme on compose toujours par f croissante, on montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
De même,
• si $u_0 \geq u_1$ alors $f(u_0) \geq f(u_1)$ en composant par f croissante donc $u_1 \geq u2$.
Ainsi, $f(u_1) \geq f(u_2)$ en composant par f croissante donc $u_2 \geq u_3$ ...etc.... on montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

4 Convergence de la suite

a) Limites finies possibles de la suite

Après avoir étudié les variations d'une suite, le théorème de la limite monotone permet de justifier qu'une suite a une limite mais pas de trouver sa limite. On effectue alors la recherche des limites finies possibles pour déterminer la limite.
La recherche des limites finies possibles permet aussi dans certains cas de prouver que la suite diverge : lorsqu'il n'y a aucune limite finie possible !

Définition 2

On appelle point fixe de f toute solution de l'équation $f(x) = x$.
Visuellement, ce sont les points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x$.

Les points fixes de f permettent de trouver les limites finies possibles de la suite (u_n) grâce au théorème suivant :

Théorème 5 : théorème du point fixe

Si (u_n) converge vers un réel l et si f est bien définie et continue en l alors l est l'un des points fixes de f.

Preuve

On suppose que (u_n) tend vers l, alors :

• u_{n+1} tend vers l car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = l$ en posant $N = n+1 \to +\infty$.

De plus,

• si f est continue en l alors $f(u_n)$ tend vers $f(l)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$: les suites (u_{n+1}) et $f(u_n)$ sont égales donc ont même limite, d'où $l = f(l)$.

Méthode

Pour déterminer les limites possibles d'une suite récurrente :

On suppose que (u_n) converge vers une certaine limite finie l :

- On passe alors à la limite dans l'encadrement $u_n \in J$ (en n'oubliant pas au préalable de comparer u_n avec u_0 pour obtenir le plus petit intervalle possible contenant u_n) :
attention à transformer les inégalités strictes en inégalités larges !
Celà restreint les limites possibles à un intervalle J'.
On a alors plusieurs limites possibles :
• Celles qui sont dans J' mais ne sont pas dans l'ensemble de continuité de f ;
+
• Celles qui sont dans l'ensemble de continuité de f : Pour celles-ci, on passe alors à la limite dans l'égalité de récurrence pour obtenir l'équation $f(l) = l$ puis on résout l'équation $f(l) = l$: on ne garde que les solutions obtenues qui appartiennet bien à J'.

Il ne restera que quelques limites possibles : il faut ensuite raisonner pour trouver laquelle est la bonne (ou si aucune n'est bonne en déduire que (u_n) diverge) .

b) Convergence par inégalité des accroissements finis

Lorsque f n'est pas croissante, (u_n) n'est pas monotone donc on ne peut pas prouver la convergence de (u_n) par le théorème de la limite monotone.
On utilise alors l'inégalité des accroissements finis pour étudier la distance entre (u_n) et sa limite possible l et montrer que cette distance tend vers 0.

Méthode

Lorsqu'on vous demande de justifier une inégalité du type : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq M|u_n - l|$, il faut borner $|f'|$ sur l'intervalle J contenant (u_n) pour pouvoir utiliser l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 6

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, et de dérivée bornée sur I : $|f'| \leq M$ où M est une constante.
Alors on peut affirmer :

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|}$$

On énonce alors l'inégalité des accroissements finis puis on choisit $b = u_n \in J$ et $a = l \in J$.

On montre ensuite par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq M^n|u_0 - l|$ et on fait tendre n vers $+\infty$ pour prouver que (u_n) tend vers l.