Chapitre 6
Couples et suites de variables aléatoires discrètes

I Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Dans toute cette partie, on considère X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le **même espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1 Loi d'un couple

Définition 1

On appelle loi conjointe de (X, Y) ou loi du couple (X, Y) la donnée de :

- *les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
- *pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, la probabilité $p_{i,j} = P\big([X = i] \cap [Y = j]\big)$.*

Méthode

Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont de petits ensembles, la loi du couple (X, Y) est donnée par un tableau à double entrée :

Exemple 1

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3.
On effectue deux tirages successifs sans remise dans l'urne. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 le numéro de la seconde boule tirée et S la somme des deux numéros obtenus.
Déterminons la loi du couple (X_1, S) :

X_1 \ S				Loi de X_1
Loi de S				

Propriété 1

La famille d'évènements $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements car le couple (X, Y) prend forcément l'une de ses valeurs et ne prend pas simultanément deux valeurs distinctes.
Ainsi :

$$\boxed{\sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1}$$

Théorème 2

Soit $\{p_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ une famille de réels.
Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall (i,j) \in I \times J,\ p_{i,j} \geq 0$ (i.e. les réels sont tous positifs),
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1$ (i.e. la somme de ces réels vaut 1).

Alors la famille $\{p_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ définit la loi d'un couple, c'est-à-dire :
Il existe un couple de variables aléatoires (X, Y) telles que :
- $X(\Omega) = I$,
- $Y(\Omega) = J$ et
- $\forall (i,j) \in I \times J$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = p_{i,j}$

Remarque

Dans le cas d'un tableau donné, pour vérifier qu'il s'agit bien d'un tableau de loi d'un couple on vérifie que toutes les probas du tableau sont bien positives et que leur somme donne bien 1.

Exemple 2

Soit a un nombre réel.
Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$. Déterminer a.

2 Lois marginales

Définition 2

On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois de X et de Y.

Méthode : obtenir les lois marginales à partir de la loi du couple

Soit $i \in X(\Omega)$ fixé. Pour calculer $P(X = i)$, on décompose l'évènement $(X = i)$ sur le système complet d'évènements $(Y = j)_{j\in Y(\Omega)}$ (formule des probas totales) :

$$(X = i) = \bigcup_{j\in Y(\Omega)} (X = i) \cap (Y = j)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{P(X = i) = \sum_{j\in Y(\Omega)} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big)}$$

On fait ainsi apparaître la loi du couple dont on connait la valeur.
De même, soit $j \in Y(\Omega)$ fixé. Pour calculer $P(Y = j)$, on décompose l'évènement $(Y = j)$ sur le système complet d'évènement $(X = i)_{i\in X(\Omega)}$ (formule des probas totales) :

$$\boxed{P(Y = j) = \sum_{i\in X(\Omega)} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big)}$$

.

Exemple 1
Les lois marginales du couple (X_1, S) s'obtiennent en sommant les probabilités des différentes lignes et colonnes du tableau de la loi conjointe :

Loi de S :

i			
$P([S=i])$			

En effet,

Exemple 2
Calculer les lois marginales du couple (X, Y) :

3 Lois conditionnelles

Définition 3

Soit $(X = i)$ un évènement élémentaire de la variable X.
On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ la donnée des valeurs prises par Y, sachant $(X = i)$ et, pour chacune de ces valeurs j, la donnée de $P_{(X=i)}(Y = j)$

Exemple 1
Loi de S sachant $[X_1 = 2]$:

i		
$P_{[X_1=2]}(S = i)$		

4 Indépendance de 2 variables aléatoires réelles discrètes

Définition 4

Deux variables aléatoires réelles sont dites indépendantes si pour tout $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall i \in X(\Omega),\ \forall j \in Y(\Omega),\ P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i)P(Y = j)}$$

Cela signifie que le résultat de chaque variable aléatoire, quel qu'il soit, n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Méthode

• La réponse à la question "les variables sont-elles indépendantes ? " est souvent non.
Pour le prouver, on commence par regarder si l'une des probas du couple $P((X = i) \cap (Y = j))$ est nulle, c'est-à-dire s'il y a un cas impossible. On a alors $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0 \neq P(X = i)P(Y = j)$. Sinon, il faut tester des valeurs limites.
• Il est très rare d'avoir à prouver que des variables sont indépendantes. La plupart du temps, c'est la description de l'expérience aléatoire (l'énoncé de l'exercice) qui indique que les variables sont indépendantes. On ne justifiera l'indépendance par le calcul que si l'on est dans un exercice purement technique sans expérience aléatoire décrite ou lorsque l'indépendance n'est pas claire.

Exemple 1

Les variables S et X_1 sont-elles indépendantes ?

Exemple 2

Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

5 Covariance et coefficient de corrélation linéaire d'un couple de v.a.r.d.

cf partie II 3 en entier et méthode (calcul de covariance) de la partie II 4.

II Variables aléatoires $g(X, Y)$

Dans toute cette partie, nous allons nous intéresser à la loi d'une variable aléatoire Z, définie en fonction de deux autres variables aléatoires connues X et Y (donc fonction du couple (X, Y)).

1 Loi de $g(X, Y)$

a) Généralité

On suppose que l'on connait la loi du couple (X, Y).

Méthode

Soit $Z = g(X, Y)$ une variable aléatoire fonction de X et de Y. Exemple : $Z = X + Y$ ou $Z = XY$.
Pour calculer la loi de Z :
• On détermine son support $Z(\Omega)$ à l'aide de $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
• Pour calculer $P([Z = k])$ où $k \in Z(\Omega)$ fixé, on se ramène à la loi du couple (X, Y) en décomposant l'évènement $(Z = k)$ sur le système complet d'évènements de X (formule des probas totales), ou de Y selon les situations.

Exemple : si $Z = XY$, si on décompose $(Z = k)$ sur le s.c.e $(X = i)_{i \in X(\Omega)}$, on obtient :

$$(XY = k) = \bigcup_{i \in X(\Omega)} (X = i) \cap (XY = k)$$

donc,

$$P(XY=k)=\sum_{i\in X(\Omega)} P\left[(X=i)\cap(XY=k)\right]=\sum_{i\in X(\Omega)} P\left[(X=i)\cap(iY=k)\right]$$

Remarque

En pratique, On vous demandera presque toujours de calculer la loi d'une somme de variables aléatoires $Z=X+Y$ ou d'un produit $Z=XY$.

Exemple

Soient deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, avec $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda')$, et X et Y indépendantes. On cherche la loi de la variable $X+Y$.

1. Déterminer $(X+Y)(\Omega)$.
2. Montrer que pour tout $k\in(X+Y)(\Omega)$, $P(X+Y=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(Y=k-i)P(X=i)$.
3. Finir le calcul pour prouver : $X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda+\lambda')$

Remarque
Il faut penser à utiliser la méthode consistant à décomposer sur le système complet d'évènements de l'une des variables X ou Y dès qu'on vous demande la probabilité d'un évènement faisant intervenir les deux variables X et Y.
Par exemple, pour calculer les probabilités : $P(X = Y)$, $P(X \leq Y)$...

b) Cas particulier : Somme de binomiales ou de Poissons indépendantes

Théorème 3 : Somme de binomiales

Soient deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n', p)$, et X et Y indépendantes.
Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + n', p)$

Preuve
Cela revient à effectuer $n + n'$ épreuves indépendantes et de même probabilité de succès p, et à compter le nombre de succès car on ajoute le nombre de succès sur les n premiers tirages et le nombre de succès sur les n' suivants.

Théorème 4 : Somme de variables de Poisson

Soient deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé, avec $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda')$, et X et Y indépendantes.
Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

Preuve
C'est l'exercice de la page précédente !

c) Cas particulier : Loi du min et du max de v.a.r. indépendantes

Si $Z = max(X, Y)$ ou $Z = min(X, Y)$, l'évènement $[Z = k]$ est difficile à traduire. Par exemple, si X et Y sont les tailles de 2 personnes A et B. $max(X, Y) = 1\ m\ 70$ se traduit par $(X = 1,70) \cap (Y \leq 1,70) \cup (Y = 1,70) \cap (X \leq 1,70)$. Et cette union n'est même pas incompatible donc il faudrait même dire $(X = 1,70) \cap (Y < 1,70) \cup (Y = 1,70) \cap (X < 1,70) \cup (Y = 1,70) \cap (X = 1,70)$....bref, l'évènement n'est pas très simple !
En général, on ne va donc pas calculer directement la loi mais passer par la fonction de répartition qui est plus simple à traduire :

• **Loi du max :** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Pour trouver la loi de $Z = \max(X, Y)$:
1) On calcule la probabilité de l'évènement $(Z \leq k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ fixé car cet évènement est facile à traduire :

$$\boxed{[\max(X, Y) \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]}$$

2) On en déduit $P(Z = k)$ grâce à la formule :

$$\boxed{P([Z = k]) = P([Z \leq k]) - P([Z \leq k - 1])}$$

• **Loi du min :** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Pour trouver la loi de $Z = \min(X, Y)$:
1) On calcule la probabilité de l'évènement $(Z \geq k)$ pour $k \in Z(\Omega)$ fixé car cet évènement est facile à traduire :

$$\boxed{[\min(X, Y) \geq k] = [X \geq k] \cap [Y \geq k]}$$

Rappel : pour calculer $P(X \geq k)$, on passera par l'évènement contraire : $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$
2) On en déduit $P(Z = k)$ grâce à la formule :

$$\boxed{P([Z = k]) = P([Z \geq k]) - P([Z \geq k + 1])}$$

2 Espérance de $g(X, Y)$

a) Cas général : théorème de transfert

Si l'on connait la loi du couple (X, Y) et que l'on souhaite calculer l'espérance de $Z = g(X, Y)$. Le théorème de transfert nous permet de connaître l'espérance de $Z = g(X, Y)$ sans avoir à connaître la loi de cette

variable aléatoire :

Théorème 5

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.
Si X et Y sont finies alors $Z = g(X, Y)$ a une espérance.
Sinon, sous réserve de convergence absolue des deux séries suivantes, on a :

$$\boxed{E[g(X,Y)] = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(i,j)P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)}$$

Remarque

Le cas particulier le plus utilisé est le calcul de l'espérance de $Z = X \times Y$.
Sous réserve de convergence absolue des séries, le théorème donne alors :

$$\boxed{E(XY) = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} ijP\big([X=i]\cap[Y=j]\big)}$$

b) Linéarité de l'espérance

Le premier cas particulier où il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème de transfert est le cas où $Z = g(X, Y)$ est une combinaison linéaire de X et Y grâce à la linéarité de l'espérance :

Propriété 6 : linéarité de l'espérance

Soit X et Y des variables aléatoires admettant une espérance , alors pour tous λ et μ réels, $\lambda X + \mu Y$ a une espérance et :

$$\boxed{E[\lambda X + \mu Y] = \lambda E(X) + \mu E(Y)}$$

Preuve

Par théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue de la série suivante, on a :

$$\begin{aligned}
E[\lambda X + \mu Y] &= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} (\lambda\, i \;+\; \mu\, j)P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} \lambda\, iP\big([X=i]\cap[Y=j]\big) + \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} \mu\, jP\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\\
&= \lambda \sum_{i\in X(\Omega)} i\left(\sum_{j\in Y(\Omega)} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\right) + \mu \sum_{j\in Y(\Omega)} j\left(\sum_{i\in X(\Omega)} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\right)\\
&= \lambda \sum_{i\in X(\Omega)} iP([X=i]) + \mu \sum_{j\in Y(\Omega)} jP([Y=j]) \text{ par formule des probabilités totales}\\
&= \lambda E(X) + \mu E(Y)
\end{aligned}$$

c) Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes

Le second cas particulier où il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème de transfert est le cas où $Z = XY$; uniquement si X et Y sont indépendantes

Propriété 7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes** admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

Preuve

Par théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue de la série suivante, on a :

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} i\ j\ P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} i\ j\ P([X=i])\times P([Y=j]) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \sum_{i\in X(\Omega)} i\ P([X=i])\left(\sum_{j\in Y(\Omega)} j\ P([Y=j])\right)\\
&= \sum_{i\in X(\Omega)} i\ P([X=i])\times E(Y)\\
&= E(Y)\times\sum_{i\in X(\Omega)} i\ P([X=i])\\
&= E(Y)E(X)
\end{aligned}$$

3 Covariance d'un couple de variables aléatoires

Dans cette sous-partie, nous revenons un temps à l'étude du couple (X,Y) en étudiant sa covariance.
La covariance d'un couple de variables aléatoires (X,Y) est un nombre permettant d'évaluer la corrélation entre les deux variables aléatoires X et Y.
Ainsi, comme nous le verrons dans cette partie, si deux variables aléatoires sont indépendantes alors leur covariance est nulle. Mais attention, la réciproque est fausse !

a) Définition

Définition 5

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, telles que X et Y admettent un moment d'ordre deux.
Alors la variable aléatoire XY admet une espérance, et on pose :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\big([X-E(X)]\times[Y-E(Y)]\big)}$$

Intuitivement, la covariance est une mesure de la variation simultanée de deux variables aléatoires. C'est-à-dire que la covariance devient plus positive pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le même sens, et plus négative pour chaque couple de valeurs qui diffèrent de leur moyenne dans le sens opposé.
En particulier, si $a\in\mathbb{R}$ (constante) et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux, alors $\operatorname{cov}(X,a)=0$.

b) Propriétés

Propriété 8 : lien avec la variance

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 (et donc une variance) . Alors,

$$cov(X,X)=E\big([X-E(X)]^2\big)=V(X)$$

Remarque

Il est facile de retenir la définition de la covariance si on connait celle de la variance :
On part de $cov(X,X)=V(X)=E\big([X-E(X)]^2\big)=E\big([X-E(X)]\times[X-E(X)]\big)$.
Et on dédouble en remplaçant le second X par Y : $cov(X,Y)=E\big([X-E(X)]\times[Y-E(Y)]\big)$

Propriété 9

La covariance est une fonction symétrique et bilinéaire :
- Symétrie : $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$.
- Bilinéarité : $\begin{cases}\operatorname{cov}(aX+bY,Z)=a\operatorname{cov}(X,Z)+b\operatorname{cov}(Y,Z)\\ \operatorname{cov}(X,aY+bZ)=a\operatorname{cov}(X,Y)+b\operatorname{cov}(X,Z)\end{cases}$: il y a linéarité par rapport à chaque variable ; la covariance se traite comme une distributivité d'un produit de facteurs.

c) Théorème de Koenig-Huygens

Propriété 10

Sous réserve d'existence,

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Preuve

Sous réserve d'existence,

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E\big([X-E(X)]\times[Y-E(Y)]\big) \\ &= E\big(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\big) \\ &= E(XY) - E(XE(Y)) - E(E(X)Y) + E(E(X)E(Y)) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Remarque

Encore une fois, si on se rappelle du théorème de Koenig-Huygens pour la variance, on dédouble en X et Y et on obtient le théorème de Koenig-Huygens général :
$V(X) = cov(X,X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X\times X) - E(X)\times E(X)$ donc $cov(X,Y) = E(X\times Y) - E(X)\times E(Y)$.

d) Cas de variables aléatoires indépendantes

Propriété 11

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes :

$$\boxed{\text{cov}(X,Y) = 0}$$

Preuve

Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ donc, par la formule de Koenig-Huygens, $cov(X,Y) = 0$.

Remarque

Lorsque la covariance de X et Y est nulle, on parle de variables non corrélées. Attention, elles ne sont pas forcément indépendantes ! (la réciproque de la proposition ci-dessus est fausse !)
En revanche, si leur covariance n'est pas nulle, cela prouve qu'elles ne sont pas indépendantes (contraposée de la proposition ci dessus).

e) Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables est le nombre le plus précis estimant la corrélation linéaire entre deux variables aléatoires c'est-à-dire qu'il vérifie si l'une des variables est une fonction affine de l'autre.

Définition 6

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, telles que X et Y admettent une espérance et une variance non nulle.
Alors (X,Y) admet une covariance et on pose :

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Propriété 12 : Variables totalement corrélées

Pour tout couple de variables aléatoires réelles discrètes (X,Y), on a :
$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
si $\rho(X,Y) = 1$, alors il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $Y = aX + b$.
si $\rho(X,Y) = -1$, alors il existe $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $Y = aX + b$.

4 Variance d'une somme

• Cas général

Propriété 13

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre deux. Alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)}$$

Preuve

$$\begin{aligned} V(X+Y) = cov(X+Y, X+Y) &= cov(X, X+Y) + cov(Y, X+Y) \text{ par linéarité à gauche de la covariance} \\ &= cov(X,X) + cov(X,Y) + cov(Y,X) + cov(Y,Y) \text{ par linéarité à droite de la covariance} \\ &= V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y) \text{ par symétrie de la covariance} \end{aligned}$$

Méthode : calcul de covariance

Pour calculer une covariance :
- Soit X et Y prennent un petit nombre de valeurs (tableau de loi), ou bien on connait $E(XY)$ grâce à une étude précédente, dans ce cas on utilise la formule de Koenig-Huygens : $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Sinon, $E(XY)$ est souvent compliqué à calculer car il faut utiliser le théorème de transfert à 2 variables qui fait intervenir une double somme ! On n'utilise donc pas K-H dans ce cas mais plutôt la formule précédente en isolant $cov(X,Y)$:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left[V(X+Y) - V(X) - V(Y)\right]$$

Cette formule est très intéressante si on connait les lois de X, Y et $X+Y$.

• Cas de variables indépendantes

Propriété 14

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes** admettant des moments d'ordre deux. Alors :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

Preuve

On applique le résultat précédent, et l'indépendance des variables X et Y donne $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, et le résultat est obtenu.

Remarque

Attention, même dans le cas de variables indépendantes, il n'y a pas de linéarité de la variance.
Par exemple, on remarquera que $V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y)$.

III Suite de variables aléatoires

1 Indépendance mutuelle d'un nombre fini ou infini de variables aléatoires

a) Indépendance mutuelle de n variables aléatoires

Définition 7

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes définies ***sur un même espace probabilisé****, on dit qu'elles sont indépendantes si :*
Pour tout $(x_1, x_2, ...x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$,

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)}$$

b) Indépendance mutuelle d'une infinité de variables aléatoires

Définition 8

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes ***indépendantes*** *lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, les v.a.r. $X_0, X_1, ..., X_n$ sont indépendantes.*

Remarque

Vous n'aurez jamais à prouver que $n \geq 2$ variables sont indépendantes car l'indépendance des variables est souvent claire au vu de l'expérience aléatoire (donnée par l'énoncé).
En revanche, dans les calculs on utilisera l'indépendance de variables en transformant une proba d'intersection en produit de probas.

c) Indépendance de variables fonction des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété 15 : lemme des coalitions

Soient $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors pour toutes fonctions f et g on a :

$$\boxed{f(X_1, \ldots, X_p) \text{ et } g(X_{p+1}, \ldots, X_n) \text{ sont indépendantes.}}$$

Exemple

Soient, par exemple, X_1, X_2, X_3 et X_4 des variables indépendantes, alors, par exemple, les variables $Y = X_1X_2$ et $Z = X_3 + X_4$ sont indépendantes, mais aussi les variables $T = X_1 + X_2 + e^{X_3}$ et la variable $\ln(X_4)$....par lemme des coalitions.

2 Somme de n variables aléatoires

a) Cas particulier : loi d'une somme de Bernoulli, binomiales, Poisson indépendantes

Propriété 16 : somme de binomiales indépendantes

- Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p), \ldots, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{k} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right)$.

- Si $X_1, \ldots, X_n$ suivent des lois de Bernoulli de paramètres p et sont indépendantes, alors :
$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Propriété 17 : somme de Poissons indépendantes

Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_n)$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Remarque

Il est en général trop compliqué de trouver la loi d'une somme de $n \geq 3$ variables. En revanche, même si on ne connait par sa loi, on peut trouver facilement l'espérance et la variance d'une telle variable :

b) Espérance de la somme

Propriété 18

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes définies **sur un même espace probabilisé**, admettant toutes une espérance.
Alors la variable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une espérance, et on a :

$$\boxed{E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

c) Variance de la somme de variables INDEPENDANTES

Propriété 19

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes **indépendantes**, admettant toutes une variance.
Alors la variable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ admet une variance, et on a :

$$\boxed{V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

Remarque

Attention, il faut bien vérifier que les variables aléatoires sont indépendantes, sinon la formule est fausse !
Dans le cas général, la formule est :

$$\boxed{V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)}$$