Chapitre 7 : Intégration sur un segment

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition et les théorèmes essentiels de l'intégration d'une fonction continue sur un segment.

I Primitives

1 Définition et premières propriétés

Définition 1

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est ***UNE primitive*** *de f sur I si :*

$$F \text{ est } \underline{\text{dérivable sur } I} \text{ et } \underline{\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)}$$

Exemple

Une primitive sur $]-\infty; 0[$ (ou sur $]0; +\infty[$) de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln|x|$, mais aussi toutes les fonctions $x \mapsto \ln|x| + k$, $k \in \mathbb{R}$:

Théorème 1

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive F sur cet intervalle, qui est alors de classe C^1 sur I.

Alors l'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est $\{F + k,\ k \in \mathbb{R}\}$.

2 Calcul de primitives simples

Propriété 2

f et g des fonctions admettant des primitives F et G sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:
- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- λF est une primitive de λf sur I.

Remarque

Les primitives d'un produit fg NE SONT PAS les produits des primitives . En effet, $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \neq fg$.

Théorème 3

Soit h une fonction continue sur un intervalle I et H une primitive de h. Soit u une fonction dérivable, à valeurs dans I.

$$\boxed{\text{Une primitive de } u' \times h(u) \text{ est } H(u)}$$

Preuve

C'est une conséquence directe de la formule de la dérivée d'une composée de fonctions :
$(H(u))' = u' \times H'(u) = u' \times h(u)$.

Ce théorème nous permet de connaître les primitives de certaines composées de fonctions usuelles :

Fonction f (définie sur I)	Primitives de f (définies sur I)
1) $f = u'.e^u$	$F = e^u + k, \quad k \in \mathbb{R}$
2) $f = u'.u^{-1} = \frac{u'}{u}$	$F = \ln\lvert u\rvert + k, \quad k \in \mathbb{R}$
3) $f = u'.u^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$F = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ (cas particulier de ci-dessus avec $\alpha = -\frac{1}{2}$)	$F = 2\sqrt{u} + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Exemples

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x-1}$ ne peut être que de la forme **1)** , mais il manque $u'(x) = 3$: on le fait apparaître en multipliant et en divisant par 3 (pour ne pas modifier la fonction) :
$f(x) = e^{3x-1} = \frac{1}{3} \times 3e^{3x-1} = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$ donc admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $F(x) = \frac{1}{3}e^{u(x)} + k = \frac{1}{3}e^{3x-1} + k$.

• La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ est "presque" de la forme **2)** $\frac{u'}{u}$, à une constante multiplicative près.
On multiplie et on divise par 2 pour faire apparaître $u'(x)$:
$g(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$ a donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions $G(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + k = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + k$.

• La fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \frac{1}{x^3}$ n'est ni de la forme **1)**, ni de la forme **2)**. Il faut donc faire apparaître la forme **3)** en mettant la puissance au numérateur :
$h(x) = x^{-3} = u'(x)u(x)^{-3}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $H(x) = \frac{u(x)^{-2}}{-2} + k = -\frac{x^{-2}}{2} + k = -\frac{1}{2x^2} + k$.

II Intégrale

1 Définition

Définition 2

Soit f une fonction numérique. Si f est continue en TOUT point du segment [a ;b] alors f admet une ***intégrale de*** *a* ***à*** *b définie par :*

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$$

où F désigne UNE primitive de f sur $[a; b]$.

Remarques

1. Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie :
   Soient G et F deux primitives d'une fonction f continue sur $[a; b]$, alors il existe un réel k tel que $G = F + k$ donc :
   $$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$
2. $\int_a^b f$ est aussi noté $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(s)ds$ ...(la variable t est une variable muette : on peut donner n'importe quel nom à cette variable)

2 Méthode de calculs exacts d'une intégrale

a) Calcul direct

Si on trouve une primitive F de f grâce au tableau des primitives usuelles, alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Exemple
$\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2)$

b) Intégration par partie

Théorème 4

Soient u et v des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a; b]$, alors

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

A RETENIR : On utilise une intégration par parties pour :
- Calculer une intégrale lorsqu'elle n'est pas de la forme $u'f(u)$.
Il y a 2 cas particuliers à retenir : polynôme * exp : on dérive le polynôme et on intègre l'exponentielle ; fonction * ln : on dérive ln et on intègre la fonction
- Trouver une relation entre deux intégrales de mêmes bornes, par exemple, une relation de récurrence vérifiée par une suite définie par une intégrale :

Exemple
Suite définie par une intégrale
Soit I la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$. Montrons que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

On a :
$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$. On remarque que pour faire apparaître I_n, il faut dériver x^{n+1}. On pose donc $v(x) = x^{n+1}$ et $u'(x) = e^{-x}$.
La fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, de même que u définie par $u(x) = -e^{-x}$. On peut donc appliquer la

formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 e^{-x}x^{n+1}dx = \left[-e^{-x}x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}(n+1)x^n dx = -e^{-1} - (-\int_0^1 e^{-x}(n+1)x^n dx)$$

Ainsi,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

c) Changement de variable

Pour pouvoir faire un changement de variable, il faut que ce dernier soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$.

Méthode sur un exemple

Calculer $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}dt$ en posant le changement de variable $u = \ln(t) \Leftrightarrow t = e^u$:

la fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;e]$. On peut donc effectuer ce changement de variable.

Il faut que la nouvelle intégrale ne dépende que de la nouvelle variable u. Pour cela, il y a toujours trois étapes à respecter :

• **Bornes :** Donner les valeurs extrémales de la nouvelle variable :

t	1	e
u	0	1

• **Elément différentiel :** l'élément différentiel ne doit plus être $d\ t$ mais $d\ u$. Mais attention, $d\ t$ n'est pas égal à $d\ u$! Le lien est le suivant :

$$\boxed{d\ u = u'(t)d\ t}$$

On exprime donc $d\ u$ en fonction de $d\ t$ puis on renverse l'égalité pour obtenir $d\ t$ en fonction de $d\ u$.
Donc ici : $d\ u = \frac{1}{t}d\ t$ soit $dt = tdu = e^u du$.

• **Fonction :** il reste à exprimer la fonction à intégrer en fonction de la variable u.
Sur cet exemple, on a : $\frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2} = \frac{u}{e^u+e^u u^2}$.

Ce qui donne ici :

$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln(t))^2}dt = \int_0^1 \frac{u}{e^u+e^u u^2}e^u du = \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left[\ln|1+u^2|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

3 Propriété de l'opérateur d'intégration

a) Linéarité de l'opérateur intégration

Propriété 5

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ et μ deux réels, alors :

$$\boxed{\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g}$$

b) Relation de Chasles

Propriété 6

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et $c\in]a;b[$.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt=\int_a^c f(t)\ dt+\int_c^b f(t)\ dt}$$

c) Intégration des inégalités

Propriété 7

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, vérifiant $f\leq g$ sur I **(*)**.
Soient a, b deux éléments de I. On peut intégrer l'inégalité **(*)** de a à b :

- **bornes croissantes :**

$$\boxed{\text{Si } a\leq b \text{ alors } \int_a^b f(t)\ dt\leq\int_a^b g(t)\ dt}$$

- **bornes décroissantes :**

$$\boxed{\text{Si } a\geq b \text{ alors } \int_a^b f(t)\ dt\geq\int_a^b g(t)\ dt}$$

Remarque

En particulier, cette propriété donne la **positivité** de l'intégrale : si $f\geq 0$ sur $[a;b]$ $(a\leq b)$ alors $\int_a^b f(t)dt\geq 0$.

d) Stricte positivité de l'intégrale

Propriété 8

Si f est continue et positive sur le segment $[a;b]$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt=0\Longleftrightarrow f=0$$

e) Inégalité triangulaire

Propriété 9

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ alors :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b|f(t)|\,dt}$$

Remarque

Intégrer une fonction de a à b s'appelle aussi "sommer la fonction de a à b".
En effet, l'intégration d'une fonction est la version continue de la somme des termes (cf la partie II). Toutes les propriétés ci-dessus sont donc la version continue des propriétés sur les sommes.
Par exemple, l'inégalité triangulaire sur les sommes finies de termes était : soient x_1, x_2, ..., x_n des réels, alors

$$|x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

Elle devient si on somme sur une variable t continue :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$