Chapitre 9 : Intégrales généralisées (ou impropres)

Introduction : On rappelle que l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est définie par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a, b]}$$

On souhaite généraliser la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, du type $[a, b[$ par exemple, où f n'est pas définie ou pas continue en b. La définition ci-dessus ne convient alors plus car $F(b)$ n'existe pas.

I Définitions

1 Intégrale impropre en un point

a) Intégrale généralisée sur $[a, b[$ avec b fini ou $b = +\infty$

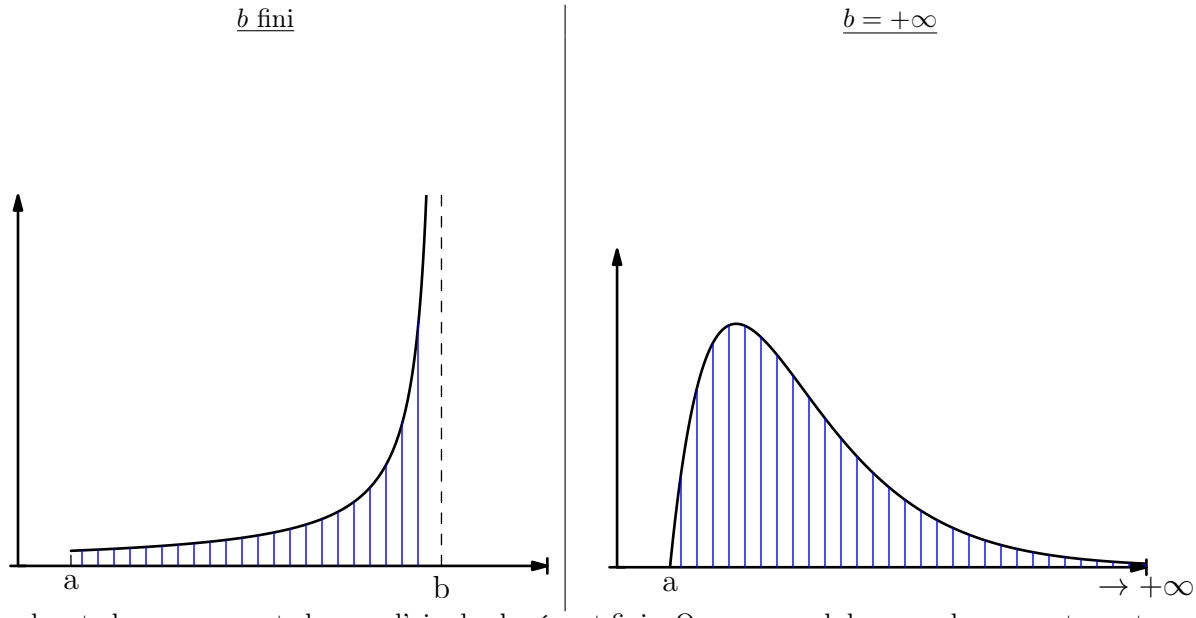
Définition 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a; b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b (vers la gauche).
On pose alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt}$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ diverge.

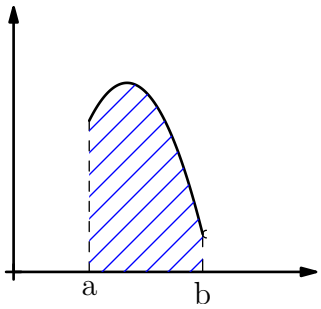
Comme l'intervalle $[a, b[$ est ouvert en b, rien n'interdit b de valoir $+\infty$.
Si f est positive, on rencontre donc essentiellement les deux situations suivantes :



L'intégrale est alors convergente lorsque l'aire hachurée est finie. On comprend donc que le comportement de la fonction au point impropre est déterminant pour la convergence : plus la fonction prend de "grandes" valeurs au voisinage de ce point et plus l'intégrale risque de diverger.

Remarque

Dans le cas où b est fini, on remarque graphiquement que si f a une limite finie en b (c'est-à-dire si f est prolongeable par continuité en b), alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge (elle est en fait égale à l'intégrale du prolongement par continuité de f sur le segment $[a, b]$).
On dit alors que l'intégrale est faussement généralisée.



Exemple

Montrons que $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt$ converge et calculons sa valeur :
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2-t}}$ est continue sur $[1; 2[$. L'intégrale est donc impropre uniquement en 2.
$\forall x \in]1; 2[$, $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt = -\int_1^x \frac{-1}{\sqrt{2-t}}dt = -\left[2\sqrt{2-t}\right]_1^x = 2 - 2\sqrt{2-x} \underset{x\to 2}{\to} 2$. L'intégrale converge et $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt = 2$.

b) Intégrale généralisée sur $]a, b]$ avec a fini ou $a = -\infty$

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert de la forme $]a; b]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a (vers la droite).
On pose alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\ dt}$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ diverge.

Exemple

Montrons que $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et déterminons sa valeur.
La fonction ln est continue sur $]0; 1]$. L'intégrale est impropre uniquement en 0.
$\forall x \in]0; 1[$, $\int_x^1 \ln(t)dt = [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 t\frac{1}{t}dt$ par intégration par partie car Id et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x; 1]$.
Ainsi, $\int_x^1 \ln(t)dt = -x\ln(x) - (1-x) \underset{x\to 0}{\to} -1$. Ainsi, l'intégrale converge et $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

2 Intégrale impropre en 2 points

Définition 3

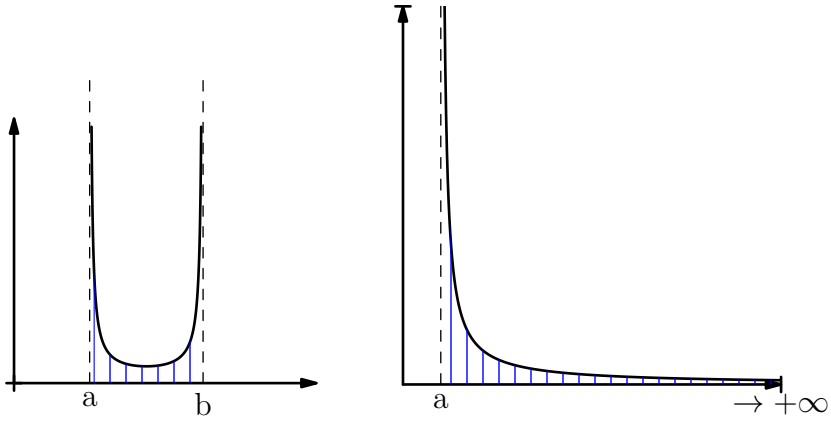
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert de la forme $]a; b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente lorsque $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes où c est un réel quelconque choisi dans $]a, b[$.
On pose alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)dt}$$

Remarque

La relation de Chasles nous assure que cette définition ne dépend pas du nombre $c \in]a, b[$ choisi pour découper l'intégrale en deux intégrales généralisées sur des intervalles semi-ouverts.

Cette situation correspond par exemple à des graphes de la forme :



Méthode : un problème à la fois !
Pour étudier une intégrale il faut :
1) Déterminer tous les points où elle est impropre ;
2) Découper l'intégrale, par relation de Chasles, en une somme d'intégrales impropres en au plus un point ;
3) Etudier chacune de ces intégrales séparément : l'intégrale de départ converge uniquement si TOUTE les intégrales de la somme convergent.

Exemple
Déterminons la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$:
$t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
Sous réserve de convergence, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Etudions séparément ces deux intégrales :
• $\forall x \in]0;1[$, $\int_x^1 \frac{1}{t^2} dt = \int_x^1 t^{-2} dt = [-t^{-1}]_x^1 = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$. L'intégrale diverge.
L'une des intégrales diverge donc on peut conclure directement que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge.

a) Cas des fonctions paires ou impaires sur $\mathbb{R}$

Dans le cas des fonctions paires ou impaires sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier l'intégrale au voisinage de $+\infty$ pour connaître son comportement au voisinage de $-\infty$:

Propriété 1 : fonctions paires

Si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors $\int_{-\infty}^0 f(t)\ dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.
De plus, si l'une des deux converge alors on a :

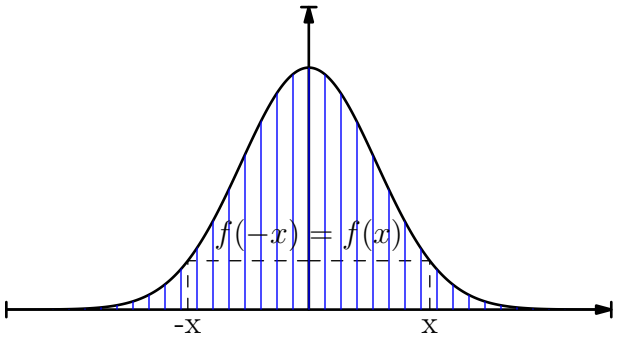
$$\boxed{\begin{array}{c} \int_{-\infty}^0 f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \\ \\ donc \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \end{array}}$$

Propriété 2 : fonctions impaires

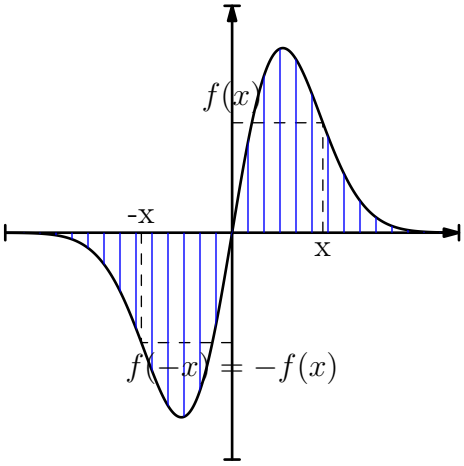
Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\int_{-\infty}^0 f(t)\ dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.
De plus, si l'une des deux converge alors on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_{-\infty}^0 f(t)\ dt = -\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \\ \\ donc \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 0 \end{array}}$$

fonction paire :



fonction impaire :



Exemple

Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$ converge.

$f : t \mapsto e^{-|t|}$ est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}$ centré en 0 et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = e^{-|-t|} = e^{-|t|} = f(t)$ (car la fonction valeur absolue est paire).

Donc, sous réserve de convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

$\forall x > 0$, $\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2$.

II Propriétés des intégrales généralisées

a) Relation de Chasles

Propriété 3

Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

Si $\int_a^b f$ est convergente alors, pour tout $c \in [a;b]$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes et :

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

b) Linéarité

Propriété 4

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes alors, pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_a^b(\lambda f + \mu g)$ est convergente et :

$$\int_a^b(\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Remarque

Cela peut également s'écrire avec la somme d'un côté et le produit par un réel λ de l'autre.

c) Croissance de l'intégrale

Propriété 5

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).
Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes alors,

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

III Critères de convergence des intégrales généralisées

1 Intégrales de référence

Propriété 6 : les intégrales de Riemann

• Pour tout $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Autrement dit, au voisinage de $+\infty$, l'intégrale de la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
• Pour tout $b > 0$, $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Autrement dit, au voisinage de 0, l'intégrale de la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve : sur quelques exemples, en prenant $a = 1$ et $b = 1$

• Si $\alpha = 1$: $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) - \ln(1) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge ; et $\int_x^1 \frac{1}{t} dt = \ln(1) - \ln(x) \underset{x \to 0}{\to} +\infty$ donc $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge ;

• Si $\alpha = 2$: $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge ; et $\int_x^1 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = \frac{1}{x} - 1 \underset{x \to 0}{\to} +\infty$ donc $\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ diverge ;

• Si $\alpha = \frac{1}{2}$: $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ diverge ; et $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\to} 2$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Remarque

Les intégrales de Riemann sont généralement utilisées comme intégrales de référence pour les théorèmes de comparaison.

2 Théorèmes de comparaisons sur les intégrales de fonctions positives

Propriété fondamentale de l'intégrale d'une fonction positive :

• Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.
Dans cette partie, nous allons uniquement considérer les fonctions f positives.
On remarque alors que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une fonction croissante. Donc $F : \int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si elle est majorée.
• De même, soit f une fonction continue sur $]a, b]$ alors $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet pour dérivée $-f$. C'est donc une fonction décroissante et $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si elle est majorée.

Théorème 7 : avec des inégalités

Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle de la forme $[a;b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ (respectivement de la forme $]a;b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$).
On suppose que $f \leq g$ sur $[a;b[$ (respectivement sur $]a;b]$). Alors :
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge
- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

Théorème 8 : avec les o

• Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle de la forme $[a;b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.
On suppose que $f(x) = o_{x\to b}(g(x))$. Alors :
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge
- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

• Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle de la forme $]a;b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.
On suppose que $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$. Alors :
- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge
- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

Théorème 9 : avec les $\sim$

• Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle de la forme $[a;b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.
On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$. Alors :

$$\int_a^b g \text{ et } \int_a^b f \text{ sont de même nature}$$

• Soient f et g deux fonctions définies, continues et **positives** sur un intervalle de la forme $]a;b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.
On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Alors :

$$\int_a^b g \text{ et } \int_a^b f \text{ sont de même nature}$$

Méthode

En pratique, on cherche tous les points où l'intégrale de f est impropre et en chacun de ces points on compare f avec une fonction dont on connait la nature de l'intégrale (fonction de Riemann la plupart du temps).
On commence par chercher un équivalent de la fonction, sinon on tente de montrer qu'elle est négligeable par rapport à une fonction de Riemann en ce point (par défaut on tente $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0).

Exemples

1. Déterminons la nature et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx$:
   L'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   Mais on remarque que $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}$ est impaire donc si $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx$ converge et vaut 0.
   Montrons donc que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx$ converge (intégrale impropre uniquement en $+\infty$) :
   $\frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}} \geq 0$ sur $[0;+\infty[$ et $\frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$
   Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge comme intégrale d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx$ converge par théorèmes de comparaison sur les intégrales de fonctions positives.
   Ainsi, par imparité, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+x^4+x^2+1}}dx = 0$.

2. Déterminons la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$:
   L'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   Mais on remarque que $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est paire donc si $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
   Montrons donc que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge (intégrale impropre uniquement en $+\infty$) :
   $e^{-t^2} \geq 0$ sur $[0;+\infty[$ et $e^{-t^2} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2}{e^{t^2}} = \frac{X}{e^X} \to 0$ en posant $X = t^2$.
   Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge comme intégrale d'une fonction de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge par théorèmes de comparaison sur les intégrales de fonctions positives.
   Ainsi, par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

3. Déterminons la nature de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$:
   L'intégrale est impropre en 0 et en 1. Sous réserve de convergence, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$.

- Nature de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$ (impropre en 0) :

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} \geq 0$ sur $]0, \frac{1}{2}]$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$. Or $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx$ converge comme intégrale d'une fonction de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$ converge par théorèmes de comparaison sur les intégrales de fonctions positives.

- Nature de $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$ (impropre en 1) :

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} \geq 0$ sur $[\frac{1}{2}; 1[$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

On remarque que la fonction intérieure est de la forme $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ où $t \to 0$ (fonction de Riemann), en posant $t = 1 - x$.

On pose de ce changement de variable : $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ converge comme intégrale d'une fonction de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{1-x}}$ converge par théorèmes de comparaison sur les intégrales de fonctions positives.

3 Nature d'une intégrale quelconque

Propriété 10 : intégrale faussement généralisée

Si l'intégrale de f est impropre en un point b fini mais que f a une limite finie en b alors l'intégrale de f converge en b.

Exemples

1. Déterminons la nature de $\int_0^1 t\ln(t)dt$:
   L'intégrale est impropre uniquement en 0 (point fini) mais $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ par croissance comparée.
   L'intégrale est faussement généralisée donc elle converge.

2. Déterminons la nature de $\int_0^1 \frac{\exp(x)-1}{x} dx$:
   L'intégrale est impropre uniquement en 0 (point fini) et $\frac{\exp(x)-1}{x} = \frac{1+x+o_{x\to 0}(x)-1}{x} = \frac{x+ox\to 0(x)}{x} = 1 + o_{x\to 0}(1) \underset{x\to 0}{\to} 1$.
   L'intégrale est faussement généralisée donc elle converge.

Propriété 11 : convergence absolue

Soit f une fonction continue telle que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt \text{ converge}}$$

On dit alors que l'intégrale converge absolument.

Remarque

Lorsque l'on voudra démontrer qu'une intégrale impropre est convergente (ou divergente), sans savoir la calculer, on montrera qu'elle est absolument convergente à l'aide des théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives ci-dessus.