Chapitre 10 : Variables aléatoires à densité

Introduction : Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des variables aléatoires non discrètes c'est-à-dire dont le support $X(\Omega)$ n'est pas discret.
Exemple : On choisit un nombre au hasard dans le segment $[0;1]$ et on note X ce nombre. Alors $X(\Omega) = [0;1]$ non discret.
La loi d'une variable aléatoire quelconque n'est alors plus caractérisée par la donnée de $P(X = x), \forall x \in X(\Omega)$ (qui vaut souvent 0 ! !) mais par la donnée de $P(X \leq x), \forall x \in X(\Omega)$ c'est-à-dire par la donnée de la fonction de répartition de la variable X.

Parmi ces variables, nous allons surtout nous intéresser à celles dites "à densité" car la notion de densité nous permet d'obtenir des formules de calculs simples : d'espérances, de variances...etc..

I Caractérisation des variables à densité

1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X

Dans cette partie uniquement, les propriétés énoncées sont valables pour toutes les variables aléatoires, qu'elles soient discrètes ou à densité.

a) Définition

Définition 1

Soit X une variable aléatoire réelle (discrète ou continue).
La fonction de répartition de X est la fonction, notée F_X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

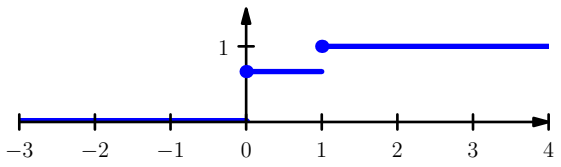
La donnée de la fonction de répartition d'une variable aléatoire caractérise sa loi.

Exemples

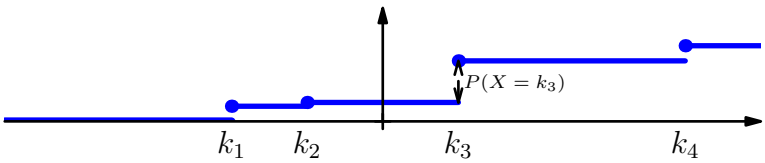
1. Fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{3})$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{2}{3} \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

Graphe de F_X :



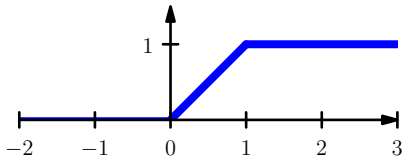
2. Cas général des variables discrètes :
La fonction de répartition d'une variable discrète est en escalier, discontinue à gauche en tout point $k \in X(\Omega)$, de saut $P(X = k)$.
Exemple de graphe où $X(\Omega) = \{k_1; k_2; k_3; k_4\}$:



3. Fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$:
On choisit un nombre au hasard dans le segment $[0;1]$. On note X ce nombre.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Graphe de F_X :



b) Propriétés d'une fonction de répartition

Propriété 1

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable réelle. Alors :
- F_X croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X = 1$,
- F_X est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x_0) = 0$ et discontinue à gauche en tout point tel que $P(X = x_0) \neq 0$.

  Plus exactement, on a l'égalité :
  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $P(X = x_0) = P(X \leq x_0) - P(X < x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x)$

Réciproquement, toute fonction vérifiant ces trois propriétés est une fonction de répartition (i.e. il existe X une variable aléatoire dont F est la fonction de répatition).

2 Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité

Définition 2

On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X vérifie les deux conditions suivantes :
- *F_X est continue sur $\mathbb{R}$*
- *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

*Toute fonction f_X, à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points est appelée une **densité (de probabilité)** de X.*

Remarque

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on ne sait pas si c'est une fonction de répartition. Pour montrer qu'il s'agit bien d'une fonction de répartition, il faut montrer en plus qu'elle est croissante et que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.

Exemples

1. La fonction de répartition d'une variable discrète X est en escalier, non continue en toute valeur du support de X. Une variable discrète n'est donc pas une variable à densité.
   Plus généralement, toute variable aléatoire réelle X admettant un réel a tel que $P(X = a) \neq 0$ n'est pas à densité.
2. **Lois exponentielles :**
   Soit X une variable aléatoire vérifiant $F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$.
   Montrons que la variable X est à densité et déterminons une densité de X :
   - $F_{X_{|\,]-\infty;0[}}$ est constante donc continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$.

- $F_{X|\ [0;+\infty[}$ est continue et de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions de classe C^1.
- Continuité en 0 : $F_X(0) = 1 - e^{-\lambda \times 0} = 0$

$\lim\limits_{t\to 0^-} F_X(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 0 = 0 = F_X(0)$
$(\lim\limits_{t\to 0^+} F_X(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 1 - e^{-\lambda t} = 0 = F_X(0)\ )$
Ainsi, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ donc X est une variable à densité.
Une densité de X doit vérifier, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f_X(t) = F'_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$. On peut, par exemple prendre $f_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$.

Propriété 2

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Preuve : dans le cas où f est continue sur $\mathbb{R}$

Si f_X est continue sur $\mathbb{R}$ alors, d'après la définition précédente, F_X est une primitive de f_X.
Mais ce n'est pas n'importe laquelle ! Il faut choisir la bonne :
F_X étant une primitive de f_X alors il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt + C$ donc $\int_0^x f_X(t)dt = F_X(x) - C$.
Il reste à trouver la constante C. Pour cela, on fait tendre x vers $-\infty$, on obtient : $C = -\int_0^{-\infty} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt$.
Ainsi,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt + C = \int_0^x f_X(t)dt + \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t)dt + \int_0^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$.

Remarque

Soit X une variable aléatoire à densité. Alors sa densité vérifie les propriétés suivantes :
- f_X est positive sur $\mathbb{R}$.
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. En effet, par définition, sauf éventuellement en un nombre fini de points, f_X est la dérivée d'une fonction F_X de classe $\mathcal{C}^1$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$.

La réciproque est vraie d'après le théorème suivant :

3 Caractérisation des densités de probabilité

Théorème 3 (admis)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité si et seulement si :
- $f(x) \geq 0$ pour tout réel x.
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Propriété 4 (admis)

Si f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X . Alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où f est continue. En un tel point on a $F'_X(x) = f(x)$.
Plus généralement, si f est continue à droite (respectivement à gauche) en x, F_X est dérivable à droite (respectivement à gauche) en x.

Exemple : loi uniforme sur $(a;b)$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Montrons que f est une densité de probabilité et calculons sa fonction de répartition :
- $f(x) = \frac{1}{b-a} \geq 0$ si $x \in [a;b]$ (car $b > a$) et $f(x) = 0 \geq 0$ si $x \notin [a,b]$ donc $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $f_{|\ ]-\infty;a[}$, $f_{|\ [a;b]}$ et $f_{|\ ]b;+\infty[}$ sont continues comme fonctions constantes donc f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{a;b\}$.
- Sous réserve de convergence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_a^b \frac{1}{b-a}dt + \int_b^{+\infty} 0dt$

La première intégrale est impropre en $-\infty$ mais converge vers 0 ($\int_x^0 0dt = 0 \underset{x\to-\infty}{\to} 0$). De même pour la dernière, donc :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1$.

f est bien une densité de probabilité. Notons X la variable dont f est une densité.

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Pour calculer une fonction de répartition, il faut dissocier autant de cas que la densité change d'expression :
• si $x < a$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
• si $a \leq x \leq b$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$.
• si $x > b$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1$.
Récapitulons :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$

II Calculs sur les variables à densité

1 Calculs de probabilités

a) $P(X = x_0)$

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire à densité. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{P(X = x_0) = 0}$$

La probabilité de tomber "pile" en une valeur est nulle pour toute valeur.

Preuve

X est une variable à densité donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en x_0. Ainsi, $P(X = x_0) = 0$

b) $P(X \in [a;b])$

Propriété 6

Soit X une variable aléatoire à densité,. Alors pour tout $a < b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{P(X \in]a;b[) = P(X \in]a;b]) = P(X \in [a;b[) = P(X \in [a;b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\ dt}$$

Preuve

$P(X \in]a;b]) = P\left((X \leq b) \cap \overline{(X \leq a)}\right) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$.

Toute les probabilités ci-dessus sont bien égales car la probabilité de valoir une valeur est nulle. Par exemple, $P(X \in [a;b]) = P\left(X \in]a;b] \cup (X = a)\right) = P(X \in]a;b]) + P(X = a) = P(X \in]a;b])$.

c) $P(X > x)$

Propriété 7

Soit X une variable aléatoire à densité,. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{P(X > x) = P(X \geq x) = 1 - F_X(x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)dt}$$

Preuve

$P(X > x) = P\left(\overline{(X \leq x)}\right) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt + \int_{x}^{-\infty} f_X(t)dt = \int_{x}^{-\infty} f_X(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)dt$ par relation de Chasles.

Remarque

En pratique, il faut retenir que $P(X \in I) = \int_I f$ i.e. $P(X \in I)$ est l'aire sous la courbe de la densité restreinte à l'intervalle I.

2 Espérance

a) Définition

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f_X une densité de X.
On dit que X admet une espérance si l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\ dt$ converge absolument.
On a alors :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\ dt}$$

Exemples

1. **Espérance d'une loi exponentielle :**

   Soit X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

   Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ or $tf(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda t\ e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

   donc $t\ f(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$.
   La convergence absolue est donc équivalente à la convergence. Prouvons la convergence de l'intégrale :
   Sous réserve de convergence, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^{+\infty} \lambda t\ e^{-\lambda t} dt$
   • $\int_{-\infty}^{0} 0dt$ converge et vaut 0 : $\int_x^0 0dt = 0 \underset{x \to -\infty}{\to} 0$.
   • Montrons que $\int_0^{+\infty} t\ \lambda\ e^{-\lambda t} dt$ converge et calculons sa valeur :
   $\forall x > 0$, $\int_0^x t\ \lambda\ e^{-\lambda t} dt = \left[-t\ e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt$ par I.P.P. avec u et v définies par $u(t) = -e^{-\lambda t}$ et $v(t) = t$ de classe C^1 sur $[0; x]$.
   Ainsi, $\int_0^x \lambda t\ e^{-\lambda t} dt = -xe^{-\lambda x} - \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \underset{x \to +\infty}{\to} \frac{1}{\lambda}$.

   Ainsi, $E(X)$ existe et vaut $E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^{+\infty} \lambda t\ e^{-\lambda t} dt = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$.

2. **Espérance d'une loi normale centrée réduite :**

   Soit X une VAR admettant pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On remarque que cette densité est paire donc $t \mapsto tf(t)$ est impaire. Ainsi, sous réserve de convergence absolue de $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$, on a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 0$.
   Vérifions que $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolue (donc converge car $tf(t) \geq 0$) :
   $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est impropre en $+\infty$ et $tf(t) = o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2 \times tf(t) = t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{t^3}{e^{\frac{t^2}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} X^{\frac{3}{2}}}{e^X} \to 0$ en posant $X = \frac{t^2}{2}$.
   Ainsi, par théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge alors $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

b) Espérance de $g(X)$

Théorème 8 : théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité f_X connue.
Soit $Y = g(X)$ une variable aléatoire fonction de X.
Si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, alors $g(X)$ admet une espérance et :

$$\boxed{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ f_X(t)\ dt}$$

3 Moments d'ordre r

Définition 4

Soit r un entier naturel et X une variable à densité.
On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance, c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\, dt$ est absolument convergente.
Dans ce cas on note :

$$\boxed{m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\, dt}$$

le moment d'ordre r de X.

Propriété 9

Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre r' pour tout $r' \leq r$.

4 Variance

Définition 5 et théorème de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 ; alors X et X^2 admettent une espérance.
On dit alors que X admet une variance et on pose :

$$\boxed{V(X) = E\big([X - E(X)]^2\big) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Exemples

1. **Variance d'une loi exponentielle :**

   Soit X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Vérifions si la variance existe et le cas échéant, calculons cette variance :

   - On regarde si la variable a un moment d'ordre 2 :

   Sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ avec $t^2 f(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la convergence absolue est équivalente à la convergence.
   Sous réserve de convergence, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt$. Montrons que cette intégrale converge :
   $\forall x \geq 0$, $\int_0^x t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^x + 2\int_0^x t e^{-\lambda t} dt$ par I.P.P. avec u et v définies par $u(t) = -e^{-\lambda t}$ et $v(t) = t^2$ de classe C^1 sur $[0; x]$.
   Ainsi, $\int_0^x t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt \underset{x \to +\infty}{\to} 0 + 2\frac{E(X)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$.

   Enfin, par théorème de Koenig-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. **Variance d'une loi normale centrée réduite :**

   On sait que la densité définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire donc $t \mapsto t^2 f(t)$ est paire.
   ainsi, sous réserve de convergence absolue de $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ on a $E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$.
   Calculons $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$: $t^2 f(t) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale converge absolument ssi elle converge.
   Par I.P.P. : $\forall x > 0$, $\int_0^x t^2 f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x t \times t\, e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \underset{x \to +\infty}{\to}$
   $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ (par parité de f) $= \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $E(X^2) = 2 \times \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt = 1$.
   Par théorème de Koenig-Huygens, on obtient : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1$.

5 Variable centrée réduite associée à X

Définition 6

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux.
On dit que X est ***centrée*** *si $E(X) = 0$.*
On dit que X est ***réduite*** *si $V(X) = 1$.*
De plus si X est une variable quelconque admettant un moment d'ordre deux, alors la variable

$$\boxed{X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}}$$

est centrée réduite.
X^* est appelée ***la variable centrée réduite associée à X****.*

Preuve

$E(X^*) = E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}(E(X) - E(X)) = 0$

$V(X^*) = V\left(\frac{X}{\sigma(X)} - \frac{E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)}V(X) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1.$

Remarque

Cette variable centrée réduite sera très importante pour deux types de problèmes :
- l'utilisation de lois normales.
- le théorème central limite et les approximations qui s'en déduiront.

III Lois usuelles

1 Loi uniforme

La loi uniforme est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans le segment $[a; b]$:
$X(\Omega) = [a; b]$ un segment.
X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a; b]$.
Graphe de la densité d'une uniforme :

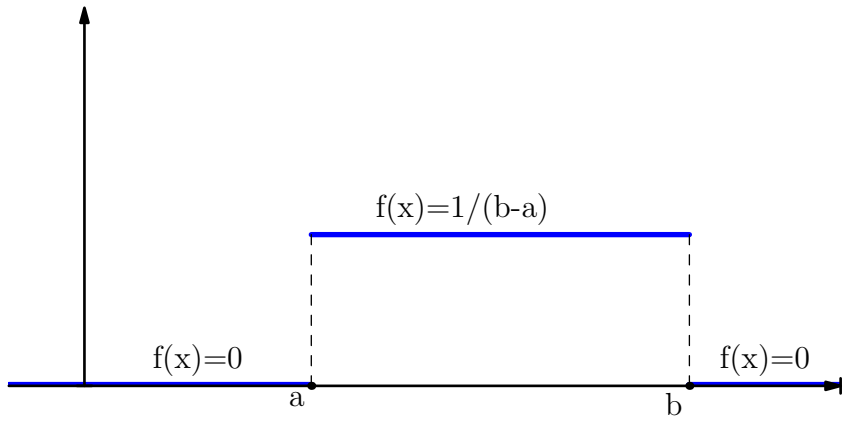


Tableau de la loi uniforme :

Loi	(UNE) Densité	(LA) Fonction de répartition	espérance	variance
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$	$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a; b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a; b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Propriété 10

Toute transformation affine d'une variable suivant une loi uniforme, suit toujours une loi uniforme.
Plus exactement, soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, alors :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]) \Leftrightarrow Y = a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])}$$

Preuve

• Supposons que X suit une loi uniforme sur $[0;1]$. Montrons que $Y = a + (b-a)X$ suit une loi uniforme sur $[a;b]$:
$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(a + (b-a)X \leq x) = P((b-a)X \leq x - a) = P(X \leq \frac{x-a}{b-a})$ (car $b - a > 0$) $= F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. Or $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. On remplace la variable par $\frac{x-a}{b-a}$, on obtient :
$F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \frac{x-a}{b-a} < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } \frac{x-a}{b-a} \in [0;1] \\ 1 \text{ si } \frac{x-a}{b-a} > 1 \end{cases}$.
donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \frac{x-a}{b-a} < 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } \frac{x-a}{b-a} \in [0;1] \\ 1 \text{ si } \frac{x-a}{b-a} > 1 \end{cases}$.
Cherchons pour quelles valeurs de x on a les différentes expressions :
$\frac{x-a}{b-a} < 0 \Leftrightarrow x - a < 0$ (car $b - a > 0$) $\Leftrightarrow x < a$ et $\frac{x-a}{b-a} > 1 \Leftrightarrow x - a > b - a$ (car $b - a > 0$) $\Leftrightarrow x > b$.
Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$. On reconnait la fonction de répartition d'une variable suivant une loi uniforme sur $[a;b]$.

• De même, on peut montrer que réciproque, si Y suit une loi uniforme sur $[a;b]$ alors $X = \frac{Y-a}{b-a}$ suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
On prouve ainsi que Y peut s'écrire : $Y = a + (b-a)X$ où X suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

Remarque

Cette propriété est importante en informatique car Scilab ne sait simuler qu'une loi uniforme sur $[0;1]$ grâce à la fonction rand().
pour simuler une loi uniforme sur $[3;5]$ par exemple, on utilise donc la propriété précédente :
$Y = 3 + 2 * rand()$ suit une loi uniforme sur $[3;5]$.

2 Loi exponentielle

a) La loi exponentielle

Graphe de la densité d'une loi exponentielle :

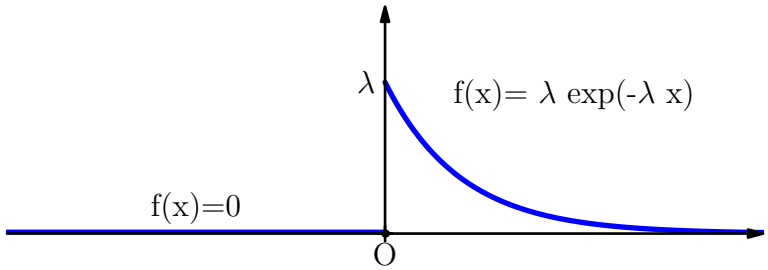


Tableau de la loi exponentielle :

Loi	(UNE) Densité	(LA) Fonction de répartition	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Remarque : intégrales usuelles liées à la loi exponentielle

En reconnaissant des moments de la loi exponentielle, il faut savoir redémontrer les égalités suivantes :
$\forall \lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$,$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}$

Preuve

• $f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité donc $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{\infty}^{0} 0dt + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt$ par relation de Chasles .
Par linéarité de l'intégration, on obtient $\lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.

• La seconde égalité vient l'espérance d'une exponentielle : $\frac{1}{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$. Par linéarité de l'intégration, on obtient : $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$.

• La dernière égalité vient du moment d'ordre 2 d'une exponentielle : $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$. Ce qui donne par linéarité de l'intégration : $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{E(X^2)}{\lambda}$.
Il suffit donc de connaître $E(X^2)$, ce qui est le cas grâce à Koenig-Huygens : $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$ d'où le résultat.

b) Variables sans mémoire

Définition 7

Une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ est dite sans mémoire si :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_{(X \geq x)}(X \geq x + t) = P(X \geq t)}$$

ou encore (c'est équivalent) :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P(X \geq x + t) = P(X \geq x)P(X \geq t)}$$

Preuve

• Cas général :

Montrons tout d'abord l'égalité (vraie pour toute variable aléatoire réelle X) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad P_{(X\geq x)}(X \geq x+t) = \frac{P(X \geq x+t)}{P(X \geq x)}$$

En effet, par définition d'une probabilité conditionnelle, on a : $P_{(X\geq x)}(X \geq x+t) = \frac{P[(X\geq x+t)\cap(X\geq x)]}{P(X\geq x)}$.
Or $(X \geq x+t) \cap (X \geq x) = (X \geq x+t)$ car si $X \geq x+t$ alors $X \geq x$, i.e. $(X >\geq x+t) \subset (X \geq x)$.
Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad P_{(X\geq x)}(X \geq x+t) = \frac{P(X \geq x+t)}{P(X \geq x)}$$

• Cas particulier des variables sans mémoire :

Ainsi, une variable aléatoire réelle positive X est sans mémoire si et seulement si :
$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P_{(X\geq x)}(X \geq x+t) = P(X \geq t)$,
si et seulement si (d'après la preuve précédente) :
$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{P(X\geq x+t)}{P(X\geq x)} = P(X > t)$,
ce qui est équivalent (en multipliant par $P(X \geq x)$) à :
$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ P(X \geq x+t) = P(X \geq x)P(X \geq t)$.

Propriété 11

Toute variable suivant la loi exponentielle de paramètre λ est sans mémoire.

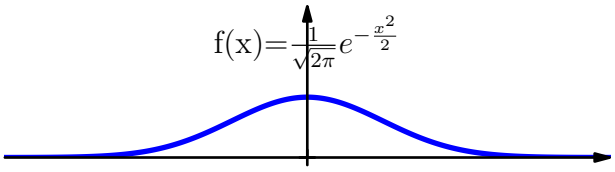
Preuve

On a $P(X \geq x+t) = 1 - F_X(x+t) = 1 - (1 - e^{-\lambda(x+t)}) = e^{-\lambda x - \lambda t} = e^{-\lambda x}e^{-\lambda t}$.
De même $P(X \geq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$ et $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ donc $P(X \geq x+t) = P(X \geq x)P(X \geq t)$.

3 Loi normale (ou de Laplace- Gauss)

a) Loi normale centrée réduite

Graphe de la densité d'une loi normale centrée réduite :



La densité d'une normale centrée réduite est paire. Elle a la forme d'une "cloche".

Tableau de la loi normale centrée réduite :

Loi	(UNE) Densité	(LA) Fonction de répartition	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$

Remarque : intégrales usuelles liées à la loi normale

En reconnaissant des moments de la loi normale centrée réduite, il faut savoir redémontrer les égalités suivantes :
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$,$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, $\int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Preuve

• La première égalité vient du fait que $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dt = 1$.
Or on sait que la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
On obtient la troisième égalité en posant le changement de variable $u = \sqrt{2}x$ dans la seconde égalité.
• $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \sqrt{2\pi}E(X) = 0$ (résultat cohérent car $x \mapsto xf_X(x)$ est impaire.
• $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f_X(x)dx = \sqrt{2\pi}E(X^2) = \sqrt{2\pi}(V(X) + E(X)^2) = \sqrt{2\pi}$. L'intégrale de 0 à $+\infty$ est obtenue par parité de $x \mapsto x^2f_X(x)$.

Remarque
Contrairement aux autres lois usuelles, on ne connait pas l'expression de la fonction de répartition, notée Φ, d'une normale centrée réduite car on ne sait pas primitiver $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.
Pour calculer des probabilités, on utilisera donc la table de la fonction Φ donnée en annexe .

Propriété 12

La parité de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leq -x) = P(X \geq x) \text{ donc } \boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}}$$

Preuve
$P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt$. On pose le changement de variable $u = -t$. Alors,
$P(X \geq x) = \int_{-x}^{-\infty} \varphi(-u) \times (-du) = -\int_{-x}^{-\infty} \varphi(u)\ du$ (par parité de φ) $= \int_{-\infty}^{-x} \varphi(u)\ du = P(X \leq -x)$.

Ainsi, on a : $\Phi(-x) = P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \Phi(x)$.

Exemple : calculs de probas sur une $\mathcal{N}(0,1)$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. A l'aide de la table de la fonction Φ donnée en annexe, calculons $P(X \geq 0,53)$, $P(X \leq -0,53)$, $P(|X| \leq 0,7)$:

b) Loi normale $\mathcal{N}_{m,\sigma^2}$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$

Graphe de la densité d'une loi normale $\mathcal{N}_{m,\sigma^2}$:

La densité d'une normale a la forme d'une "cloche" symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$.
La variance donne l'étalement de la cloche, plus la variance est grande, plus la cloche est étalée :

$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$:

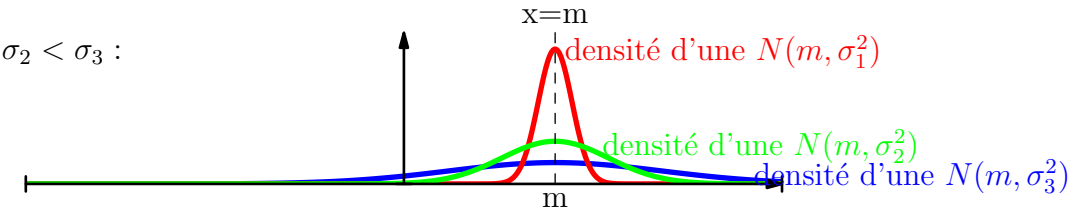


Tableau de la loi normale $\mathcal{N}_{m,\sigma^2}$:

Loi	(UNE) Densité	(LA) Fonction de répartition	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

Remarque
Comme pour la normale centrée réduite, on ne connait pas explicitement la fonction de répartition d'une normale. Or, seule la fonction de répartition Φ d'une normale centrée réduite est tabulée. Pour calculer des probas sur une normale, il faudra donc se ramener à une normale centrée réduite grâce au théorème suivant :

Théorème 13 : normale centrée réduite associée à X

Soit X une variable suivant une loi normale $\mathcal{N}_{m,\sigma^2}$.
Alors la variable centrée réduite associée à X, $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$, suit la loi normale centrée réduite.

Preuve

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X^* \leq x) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq x) = P(X \leq \sigma x + m) = \int_{-\infty}^{\sigma x+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$.

On pose le changement de variable $u = \frac{t-m}{\sigma}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X^* \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)$.

On reconnait la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite donc X^* suit une loi normale centrée réduite.

Exemples : calculs de probas sur une $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(4, 4)$. Calculons $P(X \leq 7,92)$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$. Calculons $P(-1 \leq X \leq 5)$.

Propriété 14

Toute transformation affine d'une variable suivant une loi normale suit toujours une loi normale.
Plus exactement, si $a \neq 0$, on a :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}(m; \sigma^2) \Leftrightarrow Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)}$$

Preuve

C'est le même type de démonstration que précédemment.

Remarque

Il faut juste retenir qu'une transformation affine d'une normale est une normale. Il reste alors à trouver ses paramètres en calculant son espérance et sa variance :

$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$ (par linéarité de l'espérance) $= am + b$

$V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2$

Propriété 15 (admis)

Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.

Exemple

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes telle que $\forall k \in [|1; n|]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Déterminons la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$:

IV Compléments sur les variables aléatoires quelconques

1 Indépendance

Définition 8 : indépendances de 2 variables aléatoires

On dit que 2 variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I]) \times P([Y \in J])$$

pour tous intervalles réels I et J.

Définition 9 : indépendance d'un nombre fini ou infini de variables aléatoires

• *On dit que n variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si et seulement si*

$$P([X_1 \in I_1] \cap [X_2 \in I_2] \cap ... \cap [X_n \in I_n]) = P([X_1 \in I_1]) \times P([X_2 \in I_2]) \times ... \times P([X_n \in I_n])$$

pour tous intervalles réels I_1, I_2, ..., I_n.

• *On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes.*

Théorème 16 : lemme des coalitions

Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p $(p \leq n)$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1},X_{p+2} ,...,X_n.

2 Espérance

Propriété 17

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance alors :

$$\boxed{X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)}$$

Propriété 18 : linéarité de l'espérance

• Soit X une variable admettant une espérance alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, aX a une espérance donnée par :

$$\boxed{E(aX) = aE(X)}$$

• Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance alors $X+Y$ a une espérance donnée par :

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

Corrolaire 1 : espérance d'une somme de n variables

soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles admettant une espérance alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance définie par :

$$\boxed{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)}$$

Propriété 19 : espérance d'un produit indépendant

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance. Alors XY admet une espérance qui vaut :

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

Corrolaire 2 : espérance d'un produit de n variables indépendantes

soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance alors $\prod_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance définie par :

$$\boxed{E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)}$$

3 Variance

Propriété 20 : propriété de la variance

• Soit X une variable admettant une variance alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, aX a une variance donnée par :

$$\boxed{V(aX) = a^2 V(X)}$$

• Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant une variance alors $X + Y$ a une variance donnée par :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

Corrolaire 3 : variance d'une somme de n variables

soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires réelles indépendantes admettant une variance alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance définie par :

$$\boxed{V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)}$$

Annexe : Table de la loi normale centrée réduite

La table ci-dessous contient les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple $\Phi(0,67) = 0,7486$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817