Chapitre 11
Fonctions numériques de deux variables réelles.

Introduction : Les variations des grandeurs économétriques dépendent souvent de plusieurs facteurs. On est alors amenés à étudier des fonctions de plusieurs variables.
Dans cette partie, nous nous intéressons aux fonctions numériques de deux variables c'est -à-dire aux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

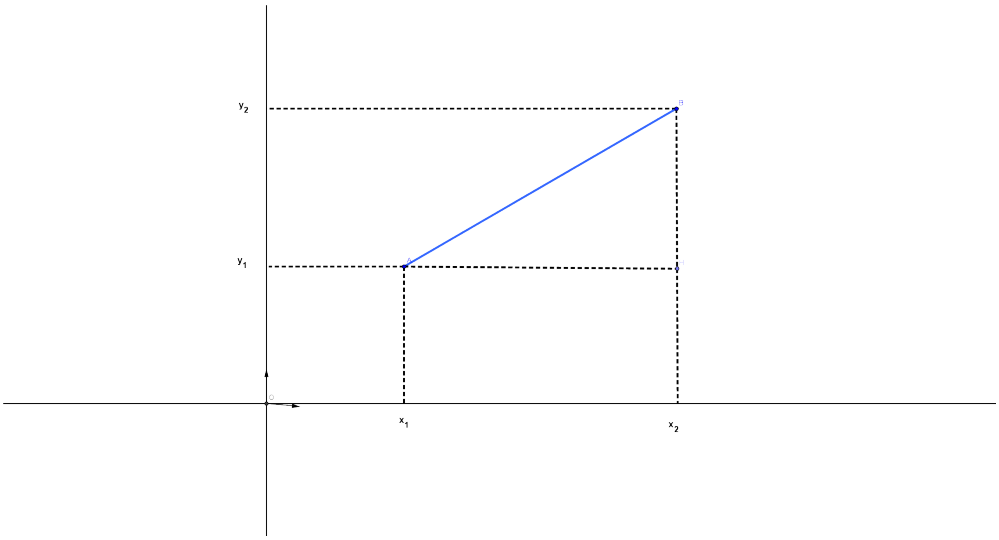
Mais les notions de continuité ou de calculs de dérivées partielles vues dans ce chapitre se généralisent aux fonctions de 3,4,...n variables.

I Généralités sur les fonctions de 2 variables

1 L'ensemble $\mathbb{R}^2$

a) Rappels :Distance dans $\mathbb{R}^2$

On représente un couple (x,y) dans le plan en l'assimilant au point M de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On peut alors parler de distance entre deux couples : c'est la distance entre les deux points assimilés :
Soient $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle distance euclidienne de A à B notée $d(A,B)$ la longueur du segment $[AB]$. Calculons cette distance :



D'après le théorème de Pythagore $AB^2 = AH^2 + HB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ donc ,

$$\boxed{d(A,B) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

On peut alors définir la notion de norme d'un point $M = (x,y)$, notée $||(x,y)||$ comme la distance de M à l'origine O :

$$\boxed{||(x,y)|| = d(O,M) = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cette notion est l'équivalent dans $\mathbb{R}^2$ de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on a :

$$\boxed{d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = ||(x_2,y_2) - (x_1,y_1)|| = ||(x_2 - x_1, y_2 - y_1)||}$$

b) Droites et cercles de $\mathbb{R}^2$

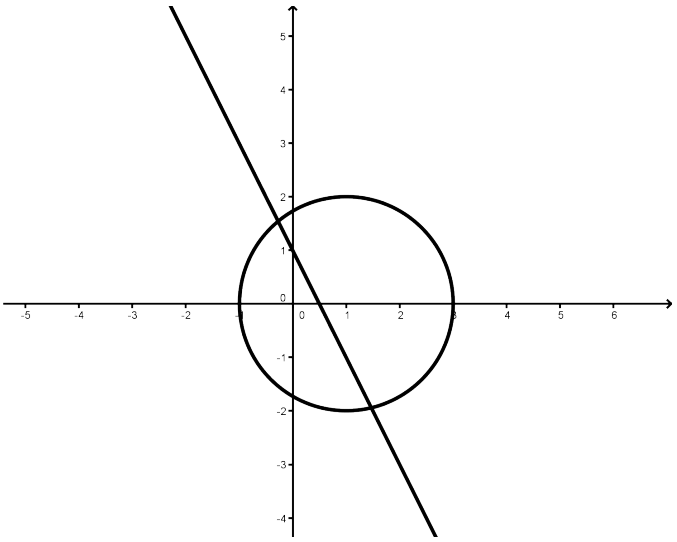
• Toute droite du plan possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.
Pour la tracer, il faut déterminer son équation réduite :
- si $a = 0$ ou $b = 0$, l'équation réduite est $x = constante$ ou $y = constante$.
-sinon, l'équation réduite est de la forme $y = cx + d$.
• Le cercle du plan de centre (a, b) et de rayon r a pour équation cartésienne : $d((x, y), (a, b)) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Exemples

1. L'axe des ordonnées est la droite d'équation $x = 0$, l'axe des abscisses est la droite d'équation $y = 0$.

2. la droite d'équation $2x - 1 + y = 0$ a pour équation réduite $y = -2x + 1$ d'où la représentation graphique ci-dessous.

3. L'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$ est l'équation du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2 d'où la représentation graphique ci-dessous.



c) Exemples de domaines de $\mathbb{R}^2$

d) Ensembles ouverts, fermés, bornés de $\mathbb{R}^2$

Définition 1

• *On appelle ouvert de $\mathbb{R}^2$ un ensemble $\mathcal{O}$ tel que, pour tout point x_0 de $\mathcal{O}$, il existe un disque de centre x_0 et de rayon $r > 0$ inclus dans $\mathcal{O}$.*
Autrement dit, $\mathcal{O}$ est un ouvert si aucun point de la frontière de $\mathcal{O}$ n'appartient à $\mathcal{O}$.

Exemples : *Un ensemble est un ouvert lorsqu'il est de la forme $]a, b[\times]c, d[$ ou lorsqu'il est défini par des inéquations strictes.*

• *On appelle fermé de $\mathbb{R}^2$ tout ensemble $\mathcal{F}$ dont le complémentaire est ouvert.*
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est un fermé si tous les points de la frontière de $\mathcal{F}$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

Exemples : *Un ensemble est un fermé lorsqu'il est de la forme $[a, b] \times [c, d]$ ou lorsqu'il est défini par des inéquations larges.*

• *On appelle partie bornée de $\mathbb{R}^2$ tout ensemble $\mathcal{D}$ vérifiant : il existe $R > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in D$, $||(x, y)|| \leq R$.*
Autrement dit, un ensemble est borné lorsqu'il est inclus dans un disque de centre $(0, 0)$ est de rayon $R > 0$ fini quelconque.

2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Une fonction numérique de 2 variables est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \right.$$

Pour représenter f, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On représente alors f par l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$.
Ainsi, (x, y) sont placés sur un plan horizontal représentant le domaine de définition, et $f(x, y)$ est la coordonnées verticale associée à (x, y).
On obtient alors une surface S appelée **surface représentative de f**, d'équation $z = f(x, y)$.

Exemple

Surface représentative de la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-3, 3[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array} \right.$:

II Continuité des fonctions de deux variables

Définition 2 : continuité en un point

*On dit que f est **continue** en (x_0, y_0) lorsque*

$$\boxed{\lim_{d((x,y),(x_0,y_0))\to 0} f(x,y) = f(x_0,y_0)}$$

Propriété 1

Les fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2 : théorèmes généraux

• La combinaison linéaire, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues est continue.
• La composée $g \circ f$ de $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathcal{D}$ et de $g : I \to \mathbb{R}$ avec $f(\mathcal{D}) \subset I$ continue sur I est continue. Autrement dit, la composée définie d'une fonction de 2 variables continue avec une fonction d'une variable continue est continue.

Exemple

1. Les fonctions coordonnées étant continues, toute fonction polynômiale et fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas est continue d'après les théorèmes généraux. Par exemple, $f(x,y) = \frac{x^3y^2-3xy+6x}{(x+y)^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrons que la fonction f définie par $f(x,y) = \ln(4-x^2-y^2)$ est continue sur $\mathcal{D}_o((0,0),2)$:
La composée est bien définie car si $(x,y) \in \mathcal{D}_o((0,0),2)$ alors $||(x,y)|| < 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 < 4 \Leftrightarrow 4-x^2-y^2 > 0$.
Ainsi f est continue comme composée définie de $(x,y) \mapsto 4-x^2-y^2$ continue sur $\mathcal{D}_o((0,0),2)$ car polynômiale, avec ln continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

III Dérivées partielles d'ordre 1

1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, et $(x_0,y_0) \in \mathcal{O}$.

• *On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première coordonnée en (x_0,y_0) si la fonction $f_{\bullet,y_0} : x \mapsto f(x,y_0)$ est dérivable en x_0.*
On note alors :

$$\boxed{(\partial_1 f)(x_0,y_0) = (f_{\bullet,y_0})'(x_0)}$$

• *On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde coordonnée en (x_0,y_0) si la fonction $f_{x_0,\bullet} : y \mapsto f(x_0,y)$ est dérivable en y_0.*
On note alors :

$$\boxed{(\partial_2 f)(x_0,y_0) = (f_{x_0,\bullet})'(y_0)}$$

Définition 4

Si f admet des dérivées partielles par rapport aux deux variables en (x_0, y_0), on appelle gradient de f en (x_0, y_0) la matrice colonne :

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(x_0, y_0) \\ \\ (\partial_2 f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}}$$

Propriété 3

• Les fonctions coordonnées : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
• La combinaison linéaire, le produit, le quotient défini de deux fonctions admettant des dérivées partielles sur $\mathcal{O}$ admet des dérivées partielles sur $\mathcal{O}$.
• La composée définie d'une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles sur $\mathcal{O}$ et d'une fonction d'une variable dérivable admet des dérivées partielles sur $\mathcal{O}$.

Méthode

En pratique, pour calculer $(\partial_1 f)(x, y)$, on dérive f en considérant que y est une constante et que x est la variable.
De même pour calculer $(\partial_2 f)(x, y)$, on dérive f en considérant que x est une constante et que y est la variable.

Exemple

Soient f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x, y) = y(2x - y)^2$ et $g(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$.
Déterminer les dérivées partielles premières de f et g.

2 Fonctions de classe C^1

a) Définition

Définition 5

Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 sur $\mathcal{O}$ si elle admet des dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées en tout point de $\mathcal{O}$, et si les applications ***de deux variables*** *$\partial_1 f : (x, y) \to (\partial_1 f)(x, y)$ et $\partial_2 f : (x, y) \to \partial_2 f(x, y)$ sont continues sur $\mathcal{O}$.*

Propriété 4

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ est continue sur $\mathcal{O}$.

b) Opérations élémentaires / Théorèmes généraux

Propriété 5

• Les fonctions coordonnées : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
• La combinaison linéaire, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1.
• La composée définie d'une fonction de deux variables de classe C^1 et d'une fonction d'une variable de classe C^1 est de classe C^1.

3 Développements limités d'ordre 1

Remarque
Rappels : Soit f une fonction d'une variable, de classe $\mathcal{C}^1$ en un point x_0, alors au voisinage de x_0 la courbe de f peut être approximée par sa tangente en x_0, grâce à la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x\to x_0}(|x - x_0|) \Leftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o_{h\to 0}(h)$$

Théorème 6 et définition

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. On a alors au voisinage de (x_0, y_0) :

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o_{(h,k)\to(0,0)}\left(||(h, k)||\right)}$$

$$\boxed{= f(x_0, y_0) + {}^t(\nabla f(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h, k) \text{ où } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0}$$

C'est l'unique développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0).

IV Dérivées partielles d'ordre 2

1 Définition

Définition 6

On appelle dérivées partielles d'ordre deux de f les dérivées partielles, lorsqu'elles existent, de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.
On note de plus :

$$\boxed{\partial^2_{1,1} f = \partial_1 (\partial_1 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{2,1} f = \partial_2 (\partial_1 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{1,2} f = \partial_1 (\partial_2 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{2,2} f = \partial_2 (\partial_2 f)}$$

Exemple
Déterminer les dérivées partielles secondes de f définie sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$. Que remarque-t-on ?

2 Fonctions de classe C^2

a) Définition

Définition 7

Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^2 sur l'ouvert $\mathcal{O}$ si elle admet des dérivées partielles premières et secondes par rapport aux deux coordonnées en tout point de $\mathcal{O}$, et si ses dérivées partielles secondes sont continues sur $\mathcal{O}$.

Propriété 7

Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

b) Opérations élémentaires / Théorèmes généraux

Propriété 8

• Les fonctions coordonnées : $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
• La combinaison linéaire, le produit, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe C^2 est de classe C^2.
• La composée définie d'une fonction de deux variables de classe C^2 et d'une fonction d'une variable de classe C^2 est de classe C^2.

c) Théorème de Schwarz

Théorème 9

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$ on a :

$$\boxed{(\partial^2_{2,1} f)(x, y) = (\partial^2_{1,2} f)(x, y)}$$

Remarque
C'est une égalité de fonctions, qui signifie que ces deux dérivées ont la même valeur en tout point $M = (x, y)$.

d) Matrice Hessienne

Définition 8

Si f admet des dérivées partielles secondes par rapport à toutes les coordonnées en (x_0, y_0), on appelle matrice hessienne de f en (x_0, y_0) la matrice carrée :

$$\boxed{\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (\partial^2_{1,1} f)(x_0, y_0) & (\partial^2_{1,2} f)(x_0, y_0) \\ (\partial^2_{2,1} f)(x_0, y_0) & (\partial^2_{2,2} f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}}$$

Propriété 10 : conséquence du théorème de Schwarz

Si f est de classe C^2 au voisinage de (x_0, y_0) alors sa matrice hessienne en (x_0, y_0) est symétrique.

3 Développements limités d'ordre 2

Remarque
Pour les fonctions d'une variable,la formule de Taylor-Young donne le développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 en un point x_0 :

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o_{x\to x_0}(|x-x_0|^2) \Leftrightarrow f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+f''(x_0)\frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

Théorème 11 et définition

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, et $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. On a alors au voisinage de (x_0, y_0) :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \partial_1 f(x_0,y_0)h + \partial_2 f(x_0,y_0)k + \partial^2_{1,1} f(x_0,y_0)\frac{h^2}{2} + \partial^2_{2,2} f(x_0,y_0)\frac{k^2}{2} + \partial^2_{1,2} f(x_0,y_0)hk + o_{(hk)\to(0,0)}\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + {}^t(\nabla f(x_0,y_0)) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \nabla^2 f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k)$$
$$\text{où } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

C'est l'unique développement limité d'ordre 2 de f en (x_0, y_0).

V Extrema

1 Extremum global

a) Définition

Définition 9

La fonction f admet un maximum global en (x_0, y_0) si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in D_f,\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)}$$

La fonction f admet un minimum global en (x_0, y_0) si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in D_f,\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)}$$

2 Extremum local

a) Définition

Définition 10

La fonction f admet un maximum local en (x_0, y_0) s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{V},\ f(x,y) \leq f(x_0,y_0)}$$

La fonction f admet un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{V},\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)}$$

b) Lien avec les extrema globaux

Propriété 12

Soit (x_0, y_0) un extremum global de f. Alors c'est un extremum local de f.

Remarques

1. La réciproque est bien entendu fausse.

2. Lorsqu'on demande de vérifier qu'un point (x_0, y_0) est un extremum local, avant de chercher à utiliser les théorèmes qui suivent, on peut calculer $f(x_0, y_0)$ et vérifier si c'est un extremum global évident, ce qui permettrait de conclure immédiatement.

Théorème 13

Une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire qu'une telle fonction admet un maximum global et un minimum global.

c) Lien avec les points critiques

Définition 11 : Point critique

Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{O}$.
*On appelle **points critiques** de f les solutions du système :*

$$\boxed{\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}}$$

Propriété 14

Soit (x_0, y_0) un point où f admet un extremum local.
Alors (x_0, y_0) est un point critique de f, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) = 0}$$

Remarques

1. La réciproque est fausse : un point critique n'est pas forcément un extremum local ! Exemple : le point col (point selle) ci-dessous.
2. Pour déterminer les extrema locaux , on cherche donc les points critiques, et on étudie ensuite chacun de ces points séparément.

Exemple
Soit f définie sur l'ouvert $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(x,y)=x(\ln(x)^2+y^2)$.
Déterminer les possibles extrema locaux de f.

d) Conditions suffisantes d'extremum local

Théorème 15

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.
Si (x_0,y_0) est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0,y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum local (respectivement un maximum local) en (x_0,y_0).

Théorème 16

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.
Si (x_0,y_0) est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0,y_0) sont non nulles et de signes opposés alors f n'a pas d'extremum local en (x_0,y_0) et (x_0,y_0) est un point col pour f.

Remarque
Dans le cas où il y a une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure.

Exemple
Soit f définie sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(x,y)=x(\ln(x)^2+y^2)$.
Déterminer les extrema locaux de f.