Indications devoir maison n° 1

Exercice 1.

1. (a) Rappel : Définition d'une application linéaire : Une application f définie sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est linéaire si : pour toutes matrices X et Y dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ,

$$f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$$

On part donc de l'expression de la fonction en remplaçant la variable par $\lambda X + Y$:
$f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) =$ ..... jusqu'à obtenir $\lambda f(X) + f(Y)$

(b) • Rappel : Définition du noyau : $Ker\ f = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ici, on résout donc l'équation $f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• Rappel : Définition de l'image : $Im\ f = \{f(X); X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\}$.
Ici, on met donc l'ensemble $\{AX; X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\}$ sous la forme $Vect$ (.....).
Ensuite ; si l'un des vecteurs de la famille génératrice obtenue est combinaison linéaire des autres vecteurs, on l'extrait de la famille, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une famille libre (c'est-à–dire qu'aucun des vecteurs ne s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs).
On a alors obtenu une *base* de l'ensemble (*famille libre et génératrice de l'ensemble*).

(c) • Rappel : f est injective si et seulement si $Ker\ f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

• Rappel : f est surjective si et seulement si son image recouvre tout son ensemble d'arrivée $\Leftrightarrow Im\ f = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. (a)

(b)

(c) Il faut montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en montrant que :

- F est non vide, en montrant que la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F
- F est stable par somme, en montrant que pour toutes matrices X et Y dans F, $X + Y$ appartient aussi à F.
- F est stable par multiplication par un scalaire, en montrant que pour toute matrice X dans F et pour tout réel λ, λX appartient aussi à F.

(d)

3. (a) Rappel : $\Leftrightarrow$ se lit "si et seulement si " . La question posée est donc : montrer que AM est égale à M **si et seulement si** DN est égale à N.
Le **si et seulement si** se prouve par double implication :
• On prouve que si $AM = M$ alors forcément $DN = N$;
• Puis on prouve l'implication inverse : si $DN = N$, on montre qu'alors forcément $AM = M$.

(b) Poser une matrice inconnue $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, calculer DN puis résoudre l'équation $DN = N$ en posant un système.

(c) Les matrices M solutions de l'équation $AM = M$ sont les matrices $M = PN$ où N est solution de l'équation $DN = N$.

Exercice 2. : **révisions étude de fonctions et suites**

1. Lorsqu'une fonction est définie par la même expression sur un intervalle (ici $\mathbb{R}_+^*$), on peut utiliser les théorèmes généraux : elle est continue comme somme, produit, quotient défini ou composée définie de fonctions continues.
   En revanche, lorsqu'elle change d'expression en un point (ici en 0), on étudie la continuité en revenant à la définition de la continuité : il faut que $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = f(0)$.
2. Pour savoir si la courbe a une tangente ou demi-tangente en un point x_0 , il faut étudier la limite du taux d'accroissement de f en x_0 i.e $\lim\limits_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
   • Si cette limite existe et est finie, Alors f est dérivable en x_0, de dérivée x_0, et la courbe de f a une tangente de pente $f'(x_0)$;
   • Si cette limite est infinie, f n'est pas dérivable en x_0 mais sa courbe a une tangente verticale en x_0 (tangente de pente infinie).

3. - Une fonction est convexe en un point x si $f''(x) \geq 0$ (conv**ex**e comme la fonction **ex**ponentielle) et elle est concave en ce point si $f''(x) \leq 0$ (concave comme logarithme).
   Quitte à tracer la courbe de la fonction exponentielle pour s'en souvenir, on retiendra qu'une fonction convexe est une fonction en dessous de ses cordes et au dessus de ses tangentes.
   De même, quitte à tracer la courbe de la fonction logarithme pour s'en souvenir, on retiendra qu'une fonction concave est une fonction eau dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes.

   - Pour étudier les variations d'une fonction, si le signe de la dérivée est impossible à obtenir, il faut étudier les variations de f', pour pouvoir trouver son signe et obtenir enfin les variations de f !
4. On rappelle qu'une bijection de I dans J est une fonction pour laquelle tout élément $y \in J$ admet <u>un et un seul</u> antécédent par f.

   En pratique, pour montrer qu'une fonction est une bijection, il faut utiliser le **théorème de la bijection :** une fonction <u>continue</u> et <u>strictement monotone</u> sur un intervalle I réalise une bijection de I dans son intervalle image $J = f(I)$.
5. On rappelle que la bijection réciproque f^{-1} de f est la fonction définie sur J qui à tout élément $y \in J$ associe son unique antécédent x par f :

   $$x = f^{-1}(y) \text{ si et seulement si } f(x) = y$$

   Pour étudier f^{-1} il faut donc échanger le rôle des x et des y dans le tableau de variations de f.
6. -
7. (a) Utiliser la bijectivité de f
   (b) Ecrire l'équation à résoudre.
   (c) Ecrire l'équation à résoudre.
   (d) Pour étudier les variations d'une suite, il faut comparer un terme quelconque x_k de la suite avec le terme suivant x_{k+1}. Ici, pour montrer qu'elle est croissante, il faut montrer que $x_k \leq x_{k+1}$, pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque.
   On utilisera l'expression de x_k et x_{k+1} en fonction de f^{-1} ainsi que les variations de f^{-1}.
8. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$
   (a) On étudie bien sûr le signe de la dérivée. J'en profite pour vous rappeler que pour étudier un signe, il faut avoir le réflexe de <u>FACTORISER</u> c.a.d : on réduit au même dénominateur puis on factorise les somme par leur facteur commun si besoin.
   (b) Utiliser les variations de φ.
   (c) On rappelle que la valeur absolue est la distance à 0 : exemples, $|-3| = 3$, $|5| = 5$, l'équation $|x| = 6$ a pour solutions $x = 6$ ou $x = -6$ et l'inéquation $|x| \leq 4$ a pour solutions tous les réels du segment $[-4; 4]$ (les dessiner sur la droite des réels pour vous en convaincre).

   (d) Transformer l'équation $x = \varphi(x)$ jusqu'à obtenir l'équation $f(x) = 1$.
   (e) Raisonner par récurrence : on ne fait une récurrence pour montrer qu'une propriété est vraie à tout rang n que lorsqu'un connait une relation de récurrence entre le rang n et le rang $n+1$! ce qui est le cas ici grâce à la relation $u_{n+1} = \varphi(u_n)$!
   On utilisera la réponse à la question 8. (b).

(f) NE PAS FAIRE UNE RECURRENCE ! Une récurrence ne sert JAMAIS à trouver un lien entre le rang n et le rang $n+1$!
En revanche, il faudra reconnaître cette question sur les suites récurrentes, c'est LA question qui utilise l'inégalité des accroissements finis :
Pour y répondre, il faut :
- Ecrire l'inégalité des accroissements finis pour la fonction ϕ sur l'intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n) :

Théorème 1 : inégalité des accroissements finis

Soit I un intervalle ou φ est dérivable, de dérivée bornée : il existe M tel que $|\varphi| \leq M$ (la distance à 0 est bornée). Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M|b-a|$$

- On choisit alors $b = u_n$ et $a = x_1$ (en vérifiant qu'ils sont bien dans l'intervalle I choisi) et on écrit l'I.A.F. pour ces deux valeurs.
- On vérifie que l'inégalité obtenue est bien égale à l'inégalité demandée.

(g) Maintenant qu'on a une relation de récurrence entre le rang n et le rang $n+1$, on peut faire une récurrence pour prouver que la relation est vraie pour tout rang n !

(h) Passer à la limite dans l'inégalité précédente.