Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'application f définie de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$$

(a) Pour tous $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) \underset{\text{en développant}}{=} A\lambda X + AY \underset{\text{car } \lambda \text{ est un réel}}{=} \lambda AX + AY = \lambda f(X) + f(Y)$.
f est bien une application linéaire .

(b) • Déterminons $Ker\ f$:

On résout l'équation $f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x - 2y - z \\ x - z \\ 2x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 3x & -2y & -z & = 0 \\ x & & -z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 3x & -2y & -z & = 0 \\ & 2y & -2z & = 0 \quad (L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1) \\ & -2y & +2z & = 0 \quad (L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 3x & -2y & -z & = 0 \\ & 2y & -2z & = 0 \\ & & 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & & = z \\ y & & = z \quad) \\ 0 & = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ker\ f = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

• Déterminons $Im\ f$:

$Im\ f = \{f(X);\ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\} = \left\{ AX;\ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ où } x,\ y,\ z \text{ sont des réels} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3x - 2y - z \\ x - z \\ 2x - 2y \end{pmatrix};\ \text{où } x,\ y,\ z \right.$
$\left\{ x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \text{où } x,\ y,\ z \text{ sont des réels} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$
$Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ car $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de $Im\ f$ donc c'en est une base.

(c) • f n'est pas injective car $Ker\ f \neq \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

• f n'est pas surjective car $Im\ f \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. On pose $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

   (a) $AX_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $AX_1 = 0X_1$.
   Ainsi, X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

   (b) • $AX_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = X_2$ donc $AX_2 = 1X_2$ Ainsi, X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
   • $AX_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 2X_3$ Ainsi, X_3 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

   (c) On pose $F = \left\{ X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); AX = 2X \right\}$.
   • Montrons que F est non vide :
   $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient bien à f.
   • Montrons que F est stable par somme :
   Soient X et Y dans F c'est-à-dire vérifiant les équations $AX = 2X$ et $AY + 2Y$. Montrons que $X + Y$ appartient forcément à F :

   $$A(X+Y) \underset{\text{en développant}}{=} AX + AY \underset{\text{car } X \text{ et } Y \text{ appartiennent à } F}{=} 2X + 2Y = 2(X+Y)$$

   On a ainsi montré que $A(X+Y) = 2(X+Y)$ donc que $X+Y$ appartient à F.
   • Montrons que F est stable par multiplication par un scalaire :
   Soit X appartenant à F c'est-à-dire vérifiant l'équation $AX = 2X$; et soit λ un réel. Montrons que λX appartient toujours à F :

   $$A(\lambda X) \underset{\text{car } \lambda \text{ est un réel}}{=} \lambda AX = \lambda 2X = 2(\lambda X)$$

   On a ainsi montré que $A(\lambda X) = 2(\lambda X)$ donc que λX appartient à F.

   Ainsi, F esy bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (d) Après méthode du pivot de Gauss on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.
   Puis, après produit matriciel, on obtient $PD = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ puis $(PD)P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\end{pmatrix} = A$.

3. On se propose de résoudre l'équation (1) : $AM = M$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
   Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

   (a) Raisonnons par double implication, on rappelle aussi pour la suite que $A = PDP^{-1}$ d'après 2.(d) et que $N = P^{-1}M$ donc $M = PN$. :
   • Supposons $AM = M \Leftrightarrow PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}N = PN \Leftrightarrow P\underbrace{DI}_{=D}N = PN \Leftrightarrow PDN = PN$.
   Alors, en multipliant la dernière égalité à gauche par P^{-1}, on obtient :
   $\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DN = \underbrace{P^{-1}P}_{=I}N \Leftrightarrow DN = N$.
   • Réciproquement, supposons $DN = N$, alors en multipliant l'égalité à gauche par P, on obtient $PDN = PN \Leftrightarrow PD\underbrace{I}_{=P^{-1}P}N = PN \Leftrightarrow \underbrace{PDP^{-1}}_{=A}\underbrace{PN}_{=M} = \underbrace{PN}_{=M}$.
   ainsi, la double implication est vérifiée.

(b) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on calcule $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$.

Alors, $DN = N$ si et seulement si $\begin{cases} 0 & = & a \\ 0 & = & b \\ 0 & = & c \\ g & = & 2g \\ h & = & 2h \\ i & = & 2i \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = g = h = i = 0.$

Ainsi, les matrices $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de cette équation sont les matrices de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où d, et et f sont des réels quelconques.

(c) Les matrices M solutions de l'équation $AM = M$ sont donc les matrices de la forme $M = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où d, et et f sont des réels quelconques.

Exercice 2. : **ECRICOME 2005**

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et sommes de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

   D'autre part, d'après les croissances comparées on a

   $$x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

   donc

   $$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 = f(0).$$

   Donc f est continue à droite en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

2. On calcule le taux d'accroissement en 0 :

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x - \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

   donc f n'est pas dérivable en 0.

   Comme le taux d'accroissement a une limite infinie, la courbe représentative de f admet une tangente verticale en 0.

3. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et sommes de fonctions usuelles de classe C^2.

   De plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x - \ln x - 1$$

   puis

   $$f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

   qui est du signe de $2x - 1$ car $x > 0$. Or on a :

   $$2x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

   donc $f''(x) \leq 0$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et f y est concave, et $f''(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et f y est convexe.

   On en déduit que f' est décroissante puis croissante donc admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$, valant

   $$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2 > 0$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

Enfin, on cherche la limite de f en $+\infty$:

$$f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, puis par somme et produit de limites.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	$\ln(2)$	↗	
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ -1	↗		↗	$+\infty$

4. Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim\limits_{0} f\ ,\ \lim\limits_{+\infty} f\right[=]-1, +\infty[= J$.

5. On échange le rôle de x et y dans le tableau de variations de f, on obtient :

x	-1		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

Avec les variations de f, f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. (On a également $\lim\limits_{-1} f^{-1} = 0$).

6. (a) La commande `x=linspace(0.01,4,400)` crée un vecteur ligne de 400 valeurs régulièrement espacée entre 0.01 et 4.
   Le programme trace un graphe approché de la courbe de f sur l'intervalle $[0.01, 4]$ à l'aide de 400 points.

   (b) • On remarque que la courbe tend bien vers $-1 = f(0)$ lorsque x tend vers 0 : f est bien continue en 0.
   • On remarque que la pente de la courbe est verticale au voisinage de 0 : il y a bien une demi tangente verticale à droite en 0.
   • On remarque que la courbe de f est au dessus de ses cordes (et au dessous de ses tangentes) sur $[0; 1/2]$: f est donc concave sur $[0, 1/2]$ et sa courbe est au dessous de ses cordes (et au dessus de ses tangentes) sur $[1/2; +\infty[$: f est donc convexe sur $[1/2; +\infty[$.

   (c) L'instruction `plot(y,x)` renverse l'ordre des abscisses et des ordonnées : à chaque valeur $y = f(x)$ en abscisse, on associe en ordonnée l'unique antécédent x de y par f : c'est la définition de la bijection réciproque de f.
   Cette instruction trace donc la courbe de f^{-1}.

   (d) La courbe obtenue est bien symétrique à la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

7. (a) Pour tout entier k, on a $k \in]-1, +\infty[= J$ donc il existe un unique $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_k) = k$.

Comme de plus $f(0) = -1 \neq k$, ce x_k est unique sur $\mathbb{R}_+$ (car le seul point supplémentaire, 0, n'est pas une solution de l'équation $f(x) = k$).

(b) x_0 est l'unique solution de $f(x) = 0$. Comme $f(1) = 0$ alors

$$x_0 = 1.$$

(c) Comme

$$f(1,5) < 1 = f(x_1) < f(2) < 2 = f(x_2) < f(2,5)$$

(avec le tableau de valeurs de f) et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que tous les termes en sont éléments alors :

$$1,5 < x_1 < 2 < x_2 < 2,5$$

(d) Comme f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans J, $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in J$ alors :

$$f(x_k) = k \Longleftrightarrow x_k = f^{-1}(k).$$

Et comme f^{-1} est croissante sur J, pour tout entier k, comme $k < k+1$ alors :

$$f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1) \quad \text{et} \quad x_k < x_{k+1}$$

Donc la suite (x_k) est croissante.

Comme $\lim\limits_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ alors :

$$x_k = f^{-1}(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty.$$

8. (a) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2+x}{x^2}.$$

qui est du signe strict de $-2+x$, donc strictement négative sur $]0;2[$, nulle en 2 et strictement positive sur $]2;+\infty[$ donc φ est strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖	↘		↗	

(b) Comme φ est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$, alors :

$$\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) = \left[\varphi(2);\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right] \simeq [1,69\ ;\ 1,73] \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$$

(c) φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3}$$

donc $\varphi''(x) \geq 0$ sur $\left[\frac{3}{2},2\right]$.

Donc φ' est croissante sur l'intervalle et si

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \text{alors} \quad \varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2) \quad \text{soit} \quad -\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0 \leq \frac{2}{9}$$

et donc :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

(d) 0 n'est solution ni pour l'une ni pour l'autre et pour tout $x > 0$:

$$x = \varphi(x) \iff \frac{2}{x} + \ln(x) = x \iff 2 + x\ln(x) = x^2 \iff x^2 - x\ln(x) - 1 = 1 \iff f(x) = 1$$

Or $f(x) = 1$ a pour unique solution x_1 donc $x = \varphi(x)$ également.

(e) Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$:

- **Initialisation** : Pour $n = 0$,

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$$

et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : On suppose qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$, alors :

$$u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad \text{donc} \quad \varphi(u_n) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ d'après 8.(b)} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion** : Pour tout entier naturel n,

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2.$$

(f) , on vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis :

- φ est dérivable sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ car de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$ pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

On en déduit alors : pour tout $(a, b) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]^2$,

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{2}{9}|b - a|$$

On choisit $a = x_1$, on a vu que $1,5 < x_1 < 2$ donc $x_1 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et on choisit $b = u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ d'après 8.(e). Alors :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$

et comme $\varphi(x_1) = x_1$ on a bien alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|.$$

(g) Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$:

- **Initialisation** : Comme $u_0 = \frac{3}{2} \leq x_1 \leq 2$, alors

$$0 \leq x_1 - u_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad |u_0 - x_1| \leq \frac{1}{2} \leq 1 = \left(\frac{2}{9}\right)^0.$$

et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$ alors :

$$|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1| \leq \frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$$

car $\frac{2}{9} \geq 0$, et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

– **Conclusion** : Pour tout entier naturel n,

$$0 \leq |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

(h) Comme $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$ alors $\left(\frac{2}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par encadrement (une valeur absolue est toujours positive) $|u_n - x_1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Enfin

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_1.$$

(i) Il suffit que l'on ait $\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4}$ pour avoir $|u_n - x_1| \leq 10^{-4}$.
Résolvons donc l'inéquation $\left(\frac{2}{9}\right)^n \leq 10^{-4} \Leftrightarrow e^{n\ln(2/9)} \leq e^{-4\ln(10)} \Leftrightarrow n\ln(2/9) \leq -4\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)}$ car $\ln(2/9) < 0$.
Or $\frac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)}$ n'est pas entier donc l'inéquation est vérifiée à partir de l'entier $N = \lfloor \frac{-4\ln(10)}{\ln(2/9)} \rfloor + 1$.

(j)
```
function y=phi(x)
    y= 2/x+log(x)
endfunction

N= floor(-4*log(10)/log(2/9))+1
U=3/2
for n=1:N do
    U=phi(U)
end
disp(U, "U=")
```
Le programme donne le résultat suivant :

```
 U=

    1.70644
```
On sait d'après la question (i) que $|u_N - x_1| \leq 10^{-4} = 0,0001$ i.e. $u_N - 0,0001 \leq x_1 \leq u_N + 0,0001$. Donc la valeur exacte de x_1 est comprise entre $1,70634$ et $1,70654$.