Indications du devoir maison n° 2

Exercice 1.

Partie 1 : étude de quelques exemples. Cf TD de révisions. Traduire et décomposer les évènements .
On transforme d'abord la proba des unions en sommes en vérifiant et justifiant que les évènements sont 2 à 2 incompatibles puis on transforme les probas des intersections par formule des probas composées.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Idem. traduire et décomposer correctement l'évènement $X_n = 0$.
2. Idem.
   On tombe sur une somme de la forme $\sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k}$: sortir q^n de la somme car il ne dépend pas de l'indice k puis faire apparaître la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x = \frac{p}{q}$.
   On rappelle que la somme finie $\sum_k x^k$ vaut : premier terme $\times \frac{1-x^{\text{nombre de termes}}}{1-x}$.
3. Traduction d'évènements comme d'hab !

Exercice 2.

Partie 2 :

1. Loi de T_n .
   (a) Commencez par traduite l'évènement $T_n = 1$ puis si besoin, $T_n = 2$, $T_n = 3$,... jusqu'à trouver la formule générale qui traduire $T_n = k$ pour un nombre k fixé.
   (b) Attention l'évènement $T_n = n$ contient deux situations possibles ! Il sera de la forme $A \cup B$! ! Il faut trouver les 2 possibilités qui amènent à faire n lancers !
   (c) Ne pas oublier que le dernier terme de la somme ($P(T_n = n)$) n'a pas la même expression que les autres (cf question 1.(b) !) .
   (d) Idem précédemment + utiliser le préliminaire.
   On rappelle que $1 - p = q \Leftrightarrow 1 - q = p$. .
2. Loi de X_n .
   (a) Traduire comme d'hab ! Il sera judicieux de remarquer que X_n suit une loi de Bernoulli et de calculer la proba la plus simple des 2 !
   (b) trivial !
3. (a) Traduire ! Ne pas oublier, lorsque vous traduisez l'évènement $Y_n = k$ d'être certains que l'évènement choisi donne bien exactement k face au cours des n lancers ! !
   (b) Trivial.
   (c) Espérance d'une somme $\Rightarrow$ on utilise la linéarité de l'espérance.
4. On rappelle que l'évènement `rand()<p` est de probabilité p donc il représente l'évènement "obtenir PILE" et donc l'évènement contraire `rand()>p` représente "FACE".

Exercice 3.

1. (a) Commencer par $X_1(\Omega)$, puis écrire les évènements en fonction des tirages élémentaires ou d'évènements dont les probabilités ont déjà été calculées.

   (b) Faire un arbre pour comprendre le sce à utiliser.

   (c) Comme toujours, il faut bien comprendre l'énoncé et le rôle des variables du programme.

2. – En considérant les deux résultats possibles ..... signifie utiliser le sce en question, et donc utiliser la formule .....

   – Ce n'est pas du tout l'état de l'instant $n+1$ en fonction de l'état de l'instant n : les n ici ne représentent pas des instants mais l'état de l'urne au départ ! On n'utilise donc pas le sce de l'instant n qui ne sert strictement à rien.

3. (a) La suite est récurrente (double, mais récurrente quand même) : on peut soit chercher à obtenir le signe de $e_{n+1} - e_n$ en l'écrivant en fonction de e_n, soit prouver l'inégalité demandée par récurrence.

   (b) On veut la convergence sans la limite, on utilise la convergence monotone.

4. (a) Utiliser la question 2 ; pas de difficulté.

   (b) On doit reconnaître une suite usuelle et utiliser la méthode habituelle : ici pour une suite récurrente double, on passe par l'équation caractéristique, on utilise la formule du cours, et on calcule enfin les deux constantes à l'aide de deux valeurs de la suite qui permettent d'écrire un système (en général les deux premières).

   (c) – On vient d'obtenir u_n, e_n est évident.

   – Pour la valeur de e_1, on est tenté d'essayer le calcul de probabilité, qui est impossible... Il faut alors penser à utiliser la seule hypothèse jamais utilisée : le résultat admis par l'énoncé sur la limite de (e_n).

   – Une fois e_1 déterminé, la dernière question est évidente.