Indications du devoir maison n° 3

Exercice 1.

1. • Une fonction est paire si :
   (a) Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0 i.e. : si $x \in D$ alors $-x \in D$
   (b) $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$

   On peut se convaincre sur un graphique que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ pour connaître sa courbe sur $\mathbb{R}_-$.

   • Une fonction est impaire si :
   (a) Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0 i.e. : si $x \in D$ alors $-x \in D$
   (b) $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

   On peut se convaincre sur un graphique que sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$ pour connaître sa courbe sur $\mathbb{R}_-$.

   -• Si on n'arrive pas à transformer directement $f(-x)$ en $-f(x)$ ou $f(x)$ on peut tenter de considérer $f(-x) - f(x)$ ou $f(-x) + f(x)$ et prouver que la quantité est nulle (cette deuxième remarque n'est valable que si la question dit si la fonction est paire ou impaire, sinon on ne peut pas savoir sur laquelle partir).

2. Pas de difficulté.

3. - Vérifier en quel point on cherche l'équivalent pour orienter la méthode : en 0, $\pm\infty$ ou $a \neq 0$ (ce dernier cas doit conduire à un changement de variable).

   - Effectuer toutes les factorisations "réelles" que l'on voit, car l'équivalent passe au produit et au quotient ; il vaut mieux traiter plusieurs facteurs compliqués qu'un seul simple !

   - Chercher la limite de chaque facteur ; si elle est finie non nulle, c'est son équivalent !

   - Si on a une limite infinie ou nulle, factoriser les sommes par le terme prépondérant (le plus fort) pour faire apparaître un facteur qui tend vers une constante, puis simplifier.

   - Si la somme "problématique" est à l'intérieur d'une fonction (ln), puissance, etc... il faut faire de même !

4. On ne nous demande pas l'expression de f^{-1} : on utilise le théorème de bijection et pas la résolution de $f(x) = y$.

5. Pas de difficulté.

6. Si l'inégalité à prouver est valable pour $t \in [a; b]$ (ou $t \in [a; +\infty[$) ou peut toujours essayer de partir de $a \leq t \leq b$ (ou $t \leq a$) et construire l'inégalité (en justifiant chaque transformation !)

   - Sinon on étudie le signe de la différence.

   - Ensuite on effectue toutes les factorisations "réelles" pour utiliser un tableau de signe.

   - Si l'un des facteurs n'a pas de signe évident (somme du premier degré ou somme de termes de même signe), il faut poser une fonction égale à ce facteur et étudier ses variations pour obtenir son signe.

7. Sur un tel graphique, on doit recenser toutes les informations précédemment obtenues sur la ou les fonctions.

8. Idem à la question 1.1

9. Attention à justifier que u tend vers 0 avant d'utiliser des DL usuels en 0 en une variable u !

10. - Utiliser les définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point particulier.

    - Comme les limites à obtenir sont en 0, le DL précédent est valable.

    - Attention au traitement des $o(\ )$ dans le calcul !

11. Pas de difficulté.

12. Pas de difficulté non plus.

13. - Il faut le signe de $f'(x)$, qui doit donc être factorisé au maximum pour utiliser un tableau de signe.

    - Si l'un des facteurs n'a pas un signe évident, poser une fonction égale à ce facteur et étudier ses variations pour obtenir son signe.

    - A la lumière de ces méthodes, à quoi peut bien servir la question 12 ?

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. - Etudier le sens de variation de f pour obtenir l'intervalle image $f([0.8;1])$.

   - Pour montrer une inégalité ou un encadrement sur une suite récurrente, on utilise une démonstration par récurrence en pensant à utiliser les variations de f si on les connaît.

2. Pour prouver qu'une équation a une solution sans donner sa valeur, on ne résout pas l'équation ! On utilise la bijection monotone/continue.
   Attention : Le théorème de la bijection sur une fonction g permet de montrer qu'une équation de la forme $g(x) = constante$ a une unique solution, pas une équation du type $g(x) = h(x)$ où l'image varie ! Il faut donc transformer l'équation en une équation de la forme $g(x) = constante$.

3. (a) On ne connaît pas α, seulement $f(\alpha)$: on commence donc par encadrer $f(\alpha)$ entre deux valeurs du type $f(\ )$ puis on utilise les variations de f.

   (b) Très difficile : On peut multiplier les inégalités et les encadrements, mais seulement si tous les termes sont positifs ! ! !

4. (a) Cette inégalité sur une suite récurrente, ultra classique, s'obtient avec le théorème des accroissements finis.

   (b) - Celle-ci, toute aussi classique, doit s'obtenir par récurrence à l'aide du résultat précédent.

   - On demande souvent directement la deuxième, et il faudra savoir qu'il faut d'abord prouver la première par les accroissements finis puis la seconde par récurrence.

5. Deux possibilités lorsqu'on n'a pas de valeur explicite :

   - l'encadrement (à regarder en priorité).

   - Pour une suite récurrente dont on a prouvé ou supposé qu'elle converge, sa limite l est solution de $f(l) = l$.

6. On remarque que si $0,2(0,5)^n \leq 0,001$ alors on aura bien $|u_n - \alpha| \leq 0,001$.
   On résout donc l'inéquation $0,2(0,5)^n \leq 0,001$ d'inconnue n.
   Remarques :
   – ne pas laisser de nombres à virgules lorsque l'on fait des calculs, les mettre sous forme de fractions d'entiers.

- pour pouvoir isoler n dans l'inéquation, il faudrait mettre $(0,5)^n$ sous la forme exponentielle à un moment...
- Ne pas arrêter les calculs tant que vous n'avez pas fait apparaître $2\frac{\ln(5)}{\ln(2)}$, au vu de l'indication de l'énoncé.

7.

Exercice 2.

1. Suivre la définition : il y a quatre points à prouver, tous extrêmement simples.
   Remarques :
   -Δ est diagonale donc diagonalisable : $\Delta = I\Delta I = I\Delta I^{-1}$.
   -Pour montrer que N est nilpotente, il faut commencer à calculer ses puissances successives.
2. (a) Il y a 2 produits matriciels à faire : $(A-I)\times(A-I)$ puis le résultats $\times(A-2I)$. Bien sûr, il ne faut surtout pas développer, il y aurait beaucoup plus de calculs à faire.

   (b) • Les valeurs propres possibles sont les racines du polynôme annulateur.
   • Pour vérifier si 1 est valeur propre, on regarde si la matrice $A-I$ est inversible ; de même, on vérifie si $A-2I$ est inversible pour savoir si 2 est valeur propre de A.

   (c) Développer l'égalité sur les puissances de A obtenue à la question 2 a) puis isoler l'identité à droite de l'égalité et enfin, factoriser par A.
3. On utilise la propriété : λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I$ n'est pas inversible (méthode du pivot).

4. (a) Rappel de cours : une famille libre à n vecteurs dans un espace de dimension n est une base de l'espace.

   (b) Vous êtes censés obtenir des vecteurs propres et des valeurs propres.

   (c) Rappel de cours : Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$constituée de vecteurs propres de M.
   Alors si on pose P la matrice dot les colonnes sont les vecteurs propres et D la matrice dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées, dans l'ordre, aux vecteurs propres précédents alors $M = PDP^{-1}$.

   (d) Multiplier correctement l'égalité par P et/ou P^{-1} à droite et/ou à gauche pour isoler D .

   (e) Sans indication,on procède par pivot de Gauss avec l'identité à côté pour calculer P^{-1}.
   N'oubliez pas de vérifier le résultat en calculant PP^{-1}.

   (f)
5. (a) Il suffit de calculer les puissances successives. Attention à bien respecter la définition de l'énoncé lorsqu'on conclut.

   (b) On vérifie proprement les quatre points ; certains ont déjà été vus.

   (c) Il suffit de connaître cette formule, et les puissances d'une matrice nilpotente pour simplifier la somme.
   Attention à bien vérifier que les matrices commutent avant d'utiliser la formule du binôme.

   (d) La propriété étant donnée, on procède par récurrence.

   (e) – Commencer par simplifier l'expression de A^n avec la question précédente !

   – On peut alors facilement conjecturer la décomposition ; mais il faut de nouveau prouver proprement les quatre points.

- Par exemple, le fait que Δ^n soit diagonalisable n'a rien d'évident... Penser que Δ est diagonalisable, il faut toujours avoir le réflexe d'utiliser alors la forme diagonalisée pour travailler sur Δ.

Exercice 3.

1. Evident.
   Attention cependant, pour toutes les questions du sujet, à ne pas confondre les propriétés de $\prod$ (des produits) avec les propiétés de $\sum$ (des sommes).
2. (a) Faire apparaître 2 dans la définition de u_n. Autre idée avec la question suivante (expression récurrente de (u_n)) : prouver ce résultat par récurrence.

   (b) Pas de difficulté. La suite (u_n) est donc récurrente, on revient à l'étude des variations d'une suite récurrente : étude du signe de $(u_{n+1} - u_n)$.

   (c) On se ramène à l'étude d'un signe puis : factorisation au maximum, étude du signe de chaque facteur (premier ou deuxième degré en une variable $X = u(x)$, somme de termes de même signe, étude d'une fonction).

   (d) Transformer $\ln(u_n)$ jusqu'à faire apparaître la forme $\ln(1+x)$.

3. – Remarquer qu'on ne demande pas la valeur de la limite.

   – On a déjà les variations de (u_n), reste à obtenir...

   – Pour obtenir un encadrement, on sépare en deux inégalités. Pour obtenir une inégalité sur une limite, on passe à la limite une inégalité sur la suite.
4.
5. (a) – Attention, la notion de produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}$ n'a jamais été définie dans le cours d'ECE, on ne peut donc pas écrire ℓ sous cette forme !

   – Il faut donc passer au ln pour transformer en une somme **avant** de prendre la limite.

   (b) Se ramener aux valeurs connues : $\ln(\ell)$ et $\ln(u_n)$.

   (c) On prouve un encadrement avec deux inégalités, et une inégalité sur une somme en sommant des inégalités. Enfin pour obtenir une inégalité sur le terme au milieu de la somme, l'indication de l'énoncé est très claire. Mais de toute manière, il faut penser à regarder si on a une inégalité obtenue précédemment, puis éventuellement se résoudre à en trouver une soi-même.

   (d) Pas évident. Séparer en deux inégalités, puis penser à obtenir l'inégalité en isolant d'abord u_n : on obtient deux inégalités sur u_n à l'aide du c) puis on en déduit celles sur $\ell - u_n$.

   (e) – La première question est évidente (méthode vue en 2a).

   – La deuxième est assez évidente également (appliquer le 4d).

   – Enfin pour obtenir la nature mais pas la somme, on utilise un théorème de comparaison avec dans l'ordre : inégalité donnée par l'énoncé, équivalent, négligeabilité devant le terme général d'une série usuelle convergente (e général $\frac{1}{n^2}$) pour la convergence ou négligeabilité du terme général d'une série usuelle divergente (en général $\frac{1}{n}$) devant celui de la série considérée pour la divergence, et enfin une inégalité qu'on obtiendrait soi-même.

   – On n'oublie pas de justifier que les termes généraux des deux séries sont de signe constants, au moins au voisinage de l'infini, avant d'utiliser le théorème.