Indications du devoir maison n° 5

Exercice 1. : **Etude d'une suite récurrente**

1. • Le signe de f est trivial (même s'il faut bien sûr justifier proprement vos affirmations). En revanche, il ne faut pas oublier (tout au long de l'exercice) que f a 2 définitions différentes : il faut donc étudier les 2 cas distinctement : 1) si $x = 0$; 2) si $x > 0$.

   • On a trouvé précédemment un intervalle stable par f qui permet de prouver par récurrence que u_n existe : car u_n reste dans l'ensemble de définition de la fonction f donc on peut calculer $f(u_n)$. On remarque que l'on prouve en même temps que u_n appartient toujours à cet intervalle stable.

2. Programme ultra-classique : on définit une unique variable u dans laquelle on met la valeur de u_0 au départ. On modifie ensuite sa valeur pour que u vale successivement u_1, u_2, u_3, ...u_N)à l'aide d'une boucle for (cf première année).

3. Ne pas oublier de distinguer deux cas :
   1) en 0 : on revient à la définition de la continuité. On étudie la fonction ln au voisinage de 1 donc s'il y a une forme indéterminée on la lève avec un développement limité ;
   2) sur $]0; +\infty[$

4. Trivial car on ne demande pas d'étudier le cas $x = 0$.

5. Simplifier au maximum le taux d'accroissement en 0 puis chercher un développement limité de chacun des <u>facteurs</u> pour déterminer la limite de ce taux d'accroissement.

6. • Pour trouver le dl : Utiliser les DLs de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ (DLs usuels). Ne pas enlever les o et ne pas passer à l'équivalent quand on vous demande un DL : un DL est une égalité !

   • Une fonction est équivalent en a au premier terme de son DL en a.

7. Rappel : une fonction est de classe C^1 en un point si : 1) elle est dérivable en ce point ; 2) sa <u>dérivée</u> est continue en ce point.

8. Pour démontrer une inégalité entre des fonctions (du type $g(x) \leq h(x)$ ou $g(x) \geq h(x)$) :
   1) On peut d'abord essayer de la montrer directement si on " voit" une comparaison simple entre ces fonctions :il faut alors bien justifier les comparaisons dues à des compositions par des fonctions croissantes ou décroissantes .
   Cette méthode est à éviter si possible car elle est très peu maîtrisée en général....

   2) Sinon (plus simple), on étudie le signe de la différence $g(x) - h(x)$ en la factorisant au maximum, puis en étudiant <u>séparément</u> le signe de chacun des facteurs et enfin en concluant par un tableau de signe . Si jamais l'un des facteur $k(x)$ a un signe trop compliqué à étudier, on peut étudier les variations de la fonction k pour en déduire son signe.

9. La croissance de f permet de prouver que l'ensemble $[e-1; +\infty[$ est un intervalle stable par f et donc de prouver par récurrence que u_n reste dans cet intervalle.

10. Il faut bien sûr d'abord étudier les variations de la suite (u_n) pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone.

    Pour trouver la valeur de la limite, on passe à la limite dans l'égalité de récurrence, ce qui donne l'équation $L = f(L)$. On résout alors cette équation pour trouver L.

Exercice 2.

Partie I

1. L'espace est défini de manière implicite, il faut passer par la caractérisation des sous-espaces vectoriels, en n'oubliant aucune des trois propriétés.

2. (a) Pour montrer l'inclusion d'un ensemble dans un autre, on revient aux éléments : on prend un élément (noté M ici) dans le 1er, et on montre qu'il appartient au deuxième.

   (b) Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on prouve une double inclusion : la première est toujours vraie, on suppose que A est inversible et on montre la seconde (avec la même méthode).

3. (a) – De même on montre une double inclusion.

   – Il est intéressant de noter que pour tout espace vectoriel E, $\{0\} \subset E$ car un espace vectoriel contient toujours l'élément 0.

   (b) Essayer d'appliquer les questions précédentes avant de se lancer dans les calculs !

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. En l'absence d'indications, on est obligé de revenir à $C - \lambda I$.
   Résultat intermédiaire pour la suite de l'exo : vous êtes censés obtenir $Sp(C) = \{0; 1; 2\}$.

2. On doit résoudre l'équation$(C - \lambda I)X = 0$ d'inconnue X pour chaque valeur propre λ obtenue mais en pratique on résout l'auqtion équivalente (plus simple) $T_\lambda X = 0$.

3. Ne pas oublier de justifier qu'on a trouvé 3 vecteurs propres de C qui forment une <u>base</u> de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Si l'un (ou plusieurs) des vecteurs propres que vous avez trouvés n'est pas de premier coefficient égal à 1, vous prenez un vecteur colinéaire à ce vecteur qui a bien 1 comme premier coefficient (appartenant bien au même espace propre par propriété de stabilité par multiplication par un scalaire des espaces vectoriels).
   Résultat intermédiaire pour la suite :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

5. Traduire ce que signifie M appartient à $E_1(C)$ et transformer l'égalité obtenue (en multipliant judicieusement par P et/ou P^{-1} à droite et/ou à gauche) jusqu'à tomber sur l'égalité qui traduit $N \in E_1(D)$.
   Comme on veut partir de M pour arriver à N et partir de P pour arriver à D, on utilisera bien sûr la relation que l'on connait entre M et N et la relation entre P et D.

6. Résoudre l'équation $N \in E_1(D)$ d'inconnue N une matrice quelconque de taille 3×3 quelconque (lui donner des coefficients quelconques à déterminer).

7. – Pour obtenir la dimension, il faut une base. Pour obtenir une base, il faut une famille libre et génératrice ou libre et ayant le bon nombre de vecteurs.

   – Puisqu'on cherche la dimension, le bon nombre de vecteurs n'est pas connu.
   – On cherche une famille génératrice en explicitant l'espace vectoriel : on veut donc résoudre l'équation $AM = M$. Cette équation est trop compliquée, on utilise donc l'exercice qui nous a fait changer de variable N et résoudre une équation équivalente sur N : on a trouvé $N = PM = ...$ (trouvé à la question précédente) et on en déduit M.

- On obtient alors $E_1 = \text{Vect}(...)$ qui donne une famille génératrice puis on prouve la liberté de cette famille.

- Pour cela, on utilise soit une des deux cas particuliers (un ou deux vecteurs) ou la définition en revenant à la résolution d'une équation.

8. Il faut reproduire la méthode précédente :
   - On résout l'équation $C^2M = CM$ en passant par la forme diagonalisée de C : on montre que l'équation est équivalente à la même équation avec D avec un certain changement de variable.

   - On résout alors l'équation avec D et on en déduit les solutions pour N puis pour $M = PN$.

   - On en déduit une famille génératrice de E_2 et on teste sa liberté.

   - On conclut enfin à la dimension de E_2 puis on vérifie s'il est égal à E_1.

Exercice 3. : **Etude d'une suite implicite**

1. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble J à déterminer et vérifier que n appartient bien à l'ensemble J.
2. On étudie une suite implicite. Il faut donc toujours :
   1) commencer par comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ dont on connait la valeur,
   2) puis en déduire une comparaison entre x_n et x_{n+1}, en composant par la fonction f^{-1}.
3. Pour démontrer une inégalité entre des fonctions (du type $g(x) \leq h(x)$ ou $g(x) \geq h(x)$) :
   1) On peut d'abord essayer de la montrer directement si on " voit" une comparaison simple entre ces fonctions :il faut alors bien justifier les comparaisons dues à des compositions par des fonctions croissantes ou décroissantes .
   Cette méthode est à éviter si possible car elle est très peu maîtrisée en général....

   2) Sinon (plus simple), on étudie le signe de la différence $g(x) - h(x)$ en la factorisant au maximum, puis en étudiant <u>séparément</u> le signe de chacun des facteurs et enfin en concluant par un tableau de signe . Si jamais l'un des facteur $k(x)$ a un signe trop compliqué à étudier, on peut étudier les variations de la fonction k pour en déduire son signe.

4. Commence toujours dans les suites implicites, pour comparer des termes :
   1) commencer par comparer $f(n/2)$, $f(x_n)$ et $f(n)$ dont on peut calculer la valeur,
   2) puis en déduire une comparaison entre $n/2$, x_n et n en composant par la fonction f^{-1}.
5. théorème d'encadrement.
6. • utiliser l'encadrement de la question 4. pour encadrer $\frac{\ln(x_n)}{n}$.

   • Pour trouver un équivalent de x_n, il faut utiliser l'égalité $f(x_n) = n$ et expliciter f pour faire apparaître $\ln(x_n)$ et x_n.

   Il faut d'ailleurs toujours penser à revenir à l'égalité de définition de la suite ($f(x_n) = n$) lorsqu'on est bloqué.

7. Comme toujours, utiliser les égalités connues sur $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ pour calculer $x_{n+1} - x_n$. On utilise après la question précédente pour trouver la limite.

8. (a) Utiliser encore l'égalité $f(x_n) = n$.

   (b) Simple. Passer à la limite dans l'égalité précédente.
   (c) Passer à l'équivalent dans l'égalité précédente.
   On sait que x_n/n tend vers 1 donc on utilisera le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 pour obtenir un équivalent de $\ln(x_n/n)$.
9. On revient à la définition de l'équivalent pour faire apparaître un "petit o" : $1 - u_n \sim 1/n$ donc $1 - u_n = 1/n + o(1/n)$. On isole ensuite x_n dans cette égalité.
10.

Exercice 4.

Partie 1

1. Question ultra classique. Pour minorer (respectivement majorer) une intégrale, on commence minorer (resp. majorer) la fonction à l'intérieur puis on intègre l'inégalité : si les bornes sont croissantes, l'intégration ne change pas le sens des inégalités.

2. Toujours très classique : pour obtenir une inégalité sur une somme, on somme des inégalités. Reste à trouver les bonnes bornes pour sommer ; attention, la formule précédente n'est pas valable pour toute valeur de k !

Partie 2

1. (a) Parfaitement défini signifie que l'opération pour calculer u_{n+1} est toujours possible.

   (b) On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou on obtient une inégalité entre les deux par récurrence en prouvant au préalable que la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

2. (a) Remplacer u_{k+1} par sa valeur en fonction de u_k puis calculer.

   (b) Deux informations fondamentales : la somme dans le résultat cherché, et le $u_{k+1}^2 - u_k^2$ qui sent très fort le télescopage. Tout ceci converge à sommer les égalités du 2a pour des valeurs de k à déterminer à l'aide du résultat de l'énoncé. On calcule ensuite les sommes des deux côtés sans grande difficulté.

   (c) On cherche une inégalité, on se ramène à un signe et on applique les méthodes habituelles. Ensuite cette inégalité permet clairement d'obtenir la limite de u_n^2, et on doit composer par une fonction bien choisie. Attention, $\sqrt{x^2}$ n'est pas égal à x !

3. (a) On se ramène à un signe, ce qui permet d'identifier le résultat à obtenir : une inégalité sur $\sum \frac{1}{u_k^2}$. On l'obtient donc en sommant les inégalités sur $\frac{1}{u_k^2}$ données par le 2c puis en majorant encore pour faire apparaître le $\frac{1}{2}v_{n-1}$ (l'écrire sous forme de somme pour voir la majoration).

   (b) Evident.

   (c) On cherche donc la limite du quotient, qu'on va clairement chercher par encadrement ; on utilise les deux inégalités précédentes qu'on pensera à transformer en deux inégalités sur u_n.