Devoir maison n° 1

A rendre le Jeudi 5 Septembre 2019

Exercice 1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On considère l'application f définie de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer une base de $Ker\ f$ et une base de $Im\ f$.

   (c) f est-elle injective ? surjective ?

2. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On admet la définition suivante :

   Définition : On dit qu'une matrice colonne X non nulle est un **vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 0** si

$$AX = 0X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   De même, une matrice colonne X non nulle est un **vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1** si

$$AX = 1X \quad ;$$

   une matrice colonne X non nulle est un **vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2** si

$$AX = 2X$$

   (a) Calculer le produit AX_1 .
   En déduire que X_1 est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on explicitera.

   (b) Calculer le produit AX_2 et l'exprimer en fonction de X_2.
   En déduire que X_2 est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on explicitera.
   Montrer de même que X_3 est un vecteur propre de A et donner la valeur propre correspondante.

   (c) On pose $F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); AX = 2X \right\}$.
   Montrer que F est un espace vectoriel.

   (d) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   Calculer P^{-1} et vérifier l'égalité :

$$A = PDP^{-1}$$

3. On se propose de résoudre l'équation (1) : $AM = M$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
   Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

   (a) Montrer : $\quad AM = M \Longleftrightarrow DN = N$.

   (b) Résoudre l'équation $DN = N$ d'inconnue $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire les matrices M solutions de l'équation $AM = M$.

Exercice 2. : **révisions étude de fonctions et suites**
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$
On donne le tableau de valeurs de f :

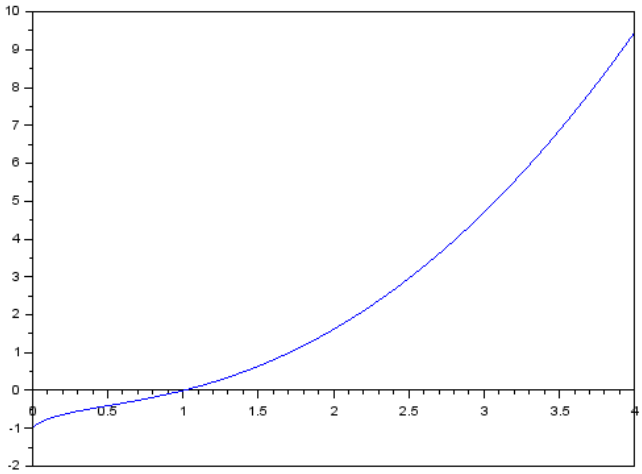
$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la courbe de f admet un demi-tangente à droite en 0 et donner l'allure de la courbe de f au voisinage de 0.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
6. **Informatique :**
   (a) On considère le programme en `Scilab` suivant :

   ```
   x=linspace(0.01,4, 400)
   y=x.^2-x.*log(x)-1
   plot(x,y)
   ```

   Que crée la commande `x=linspace(0.01,4, 400)` ? Que fait le programme ?

   (b) Une fois exécuté, le programme affiche le graphique suivant :



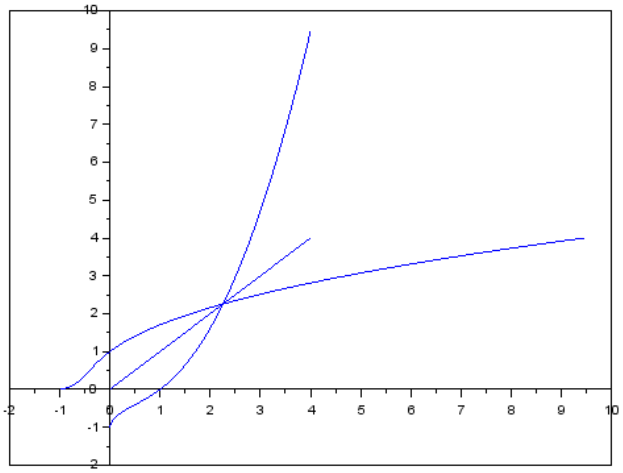
   Expliquer en quoi le graphique illustre les réponses aux questions 1., 2. et 3. de l'exercice.

   (c) A la suite du programme précédent, on rajoute les commandes

   ```
   plot(x,x)
   plot(y,x)
   ```

   Quelle fonction sera tracée grâce à la dernière instruction ?

   (d) le changement énoncé ci-dessus donne la courbe suivante :



Expliquer en quoi le graphique obtenu est cohérent.

7. Etude d'une suite implicite (x_k) :

   (a) Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$

   (b) Donner la valeur de x_0.

   (c) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2 entre deux entiers consécutifs.

   (d) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

8. Etude d'une suite récurrente (u_n) :

   On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) On donne $\varphi(\dfrac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.

   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

   (e) Montrer que pour tout entier naturel n :

   $$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$

   (f) Montrer que pour tout entier naturel n :

   $$|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}\,|u_n - x_1|$$

   (g) En déduire que pour tout entier naturel n :

   $$|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

   (h) En déduire la limite de la suite (u_n).

   (i) Déterminer un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - x_1| \leqslant 10^{-4}$.

   (j) **Informatique :** Compléter le programme suivant pour qu'il affiche u_N :

```
function y=phi(x)
    y= 2/x+log(x)
endfunction

N= floor(-4*log(10)/log(2/9))+1
U=3/2
for n=1:N do
    U=...............
end
disp(U, "U=")
```

Le programme donne le résultat suivant :

```
 U=

    1.70644
```

Expliquer pourquoi on est certains que la valeur exacte de x_1 est comprise entre $1,70634$ et $1,70654$.