Devoir maison n° 3

A rendre le Mardi 15 Octobre 2019

Exercice 1.
On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$ch\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f\,(x) = \dfrac{x}{sh\,(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ f\,(0) = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse dans cet exercice à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$$

1. Étude des fonctions ch, sh, et f.

1. Etudier la parité des fonctions ch et sh.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire le signe de $sh\,(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $sh(x)$. En déduire l'allure de la courbe représentative de la fonction sh en $+\infty$.
4. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. Etudier les variations de la fonction ch.
6. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; ch\,(x) > sh\,(x)$$
7. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh.
8. Etudier la parité de la fonction f.
9. Déterminer le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fontion sh.
10. En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'\,(0)$.
11. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et calculer $f'\,(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
12. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \;\; h\,(x) = sh\,(x) - x\;ch\,(x)$$
Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de $h\,(x)$.
13. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f. (On ne cherchera pas les points d'inflexion).

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On donne :

$$\begin{aligned} f\,(0.8) &\simeq 0.9, \;\; f(1) \simeq 0.85, \\ sh(0.6) &\simeq 0.64, \;\; sh(0.8) \simeq 0.89, \;\; sh(1) \simeq 1.18, \;\; sh(1.2) \simeq 1.51 \end{aligned}$$

1. Justifier que $f\,([0.8, 1]) \subset [0.8, 1]$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n \in [0.8, 1]$$
2. Montrer que l'équation $f\,(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la question **1.4,** sans cherche à déterminer α).

3. Donner um encadrement de α et justifier que :

$$\forall x \in [0.8, 1], \quad \frac{h(1)}{sh^2(0.8)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h(0.8)}{sh^2(1)}$$

4. On donne :

$$\frac{h(1)}{sh^2(0.8)} \simeq -0.47 \text{ et } \frac{h(0.8)}{sh^2(1)} \simeq -0.13$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.5\,|u_n - \alpha|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant 0.2\,(0.5)^n$$

5. En déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
6. *On admet :* $2\frac{log(5)}{log(2)} \in]4, 5[$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \alpha| \leq 0,001$.
7. **Informatique :**
   (a) Compléter la définition de la fonction f donnée ci-dessous :

```
function y=f(x)
    if ***** then
        y=1
    else
        y=**********
    end
endfunction
```

   (b) Compléter le programme suivant, tapé à la suite de la définition de f, pour qu'il affiche la valeur de u_N :

```
N=**********
U=1
for k=1:N do
    U=**********
end
disp(**********)
```

   (c) Une fois exécuté, le programme renvoit :

```
 U=

    0.8813753
```

   En déduire un encadrement de la valeur exacte de α.

Exercice 2.

On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k (appelé indice de nilpotence de A) tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.
Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable i.e. il existe } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telles que } \Delta = PDP^{-1} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Calculer $(A-I)^2(A-2I)$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A par méthode de polynôme annulateur puis vérifier que ce sont bien des valeurs propres de A.
   (c) Utiliser la question 2a) pour prouver que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des puissances de A et de I.
3. Retrouver les valeurs propres de A par la méthode du pivot.
4. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Prouver que la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que X_1 est un vecteur propre de Δ ; à quelle valeur propre est-il associé ?
   Même question pour X_2 et X_3.
   (c) En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :$\Delta = PDP^{-1}$.
   (d) Montrer que $D = P^{-1}\Delta P$ (en transformant l'égalité ci-dessus, sans faire de réel produit de matrices 3×3).
   (e) Calculer P^{-1}.
   (f) **Informatique :**On considère le programme suivant :

```
Delta= [3,1,0;-2,0,0;0,0,1]
[P,D]=spec(Delta)
disp(D, 'D=')
disp(P, 'P=')
```

   qui, une fois exécuté, donne les résultats suivants :

```
 D=

    2.     0     0
    0      1.    0
    0      0     1.

 P=

    0.7071068  - 0.4472136    0
  - 0.7071068    0.8944272    0
    0            0            1.
```

   i. Que fait la fonction `spec` ?
   ii. La matrice P obtenue en Scilab n'est pas la même que celle obtenue dans l'énoncé.
   Justifier que les colonnes de la matrice P donnée par Scilab forment aussi une base de vecteurs propres de Δ.
5. (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
   (b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
   (d) Établir que : Pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$
   (e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

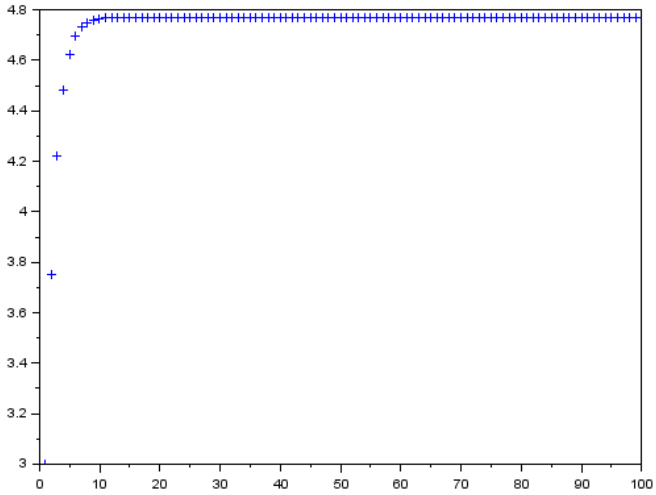
Exercice 3.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
   (c) Etablir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.
4. (a) Compléter le programme suivant qui calcule par récurrence les termes de rangs 1 à 100 de la suite (u_n) et la représente graphiquement.
   L'instruction manquante fera obligatoirement intervenir les variables `U(k)` et `puissances`.

```
U=zeros(1,100)
U(1)= 3
puissances=1/2
for k=1:99 do
    puissances=puissances*1/2
    U(k+1)= ***********
end
plot(U,'+')
```

   (b) Après exécution, on obtient le graphique suivant :



   Expliquer en quoi la représentation graphique obtenue est cohérente avec les résultats de la question 3.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 2c), que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
   (d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.