Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1. : **EDHEC 2000**

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1. Au deuxième lancer on a eu au plus un changement donc $X_2(\Omega) = \{0;1\}$ et X_2 suit une loi de Bernouilli. De plus
$$(X_2 = 1) = P_1F_2 \cup F_1P_2$$
car il faut avoir obtenu deux résultats différents, donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
$$P(X_2 = 1) = pq + pq = 2pq$$
et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq)$.

2. (a) On a $X_3(\Omega) = \{0;1;2\}$ puis :
$$(X_3 = 0) = P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3$$
car il faut obtenir 3 fois le même résultat, donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
$$P(X_3 = 0) = p^3 + q^3$$
Ensuite $(X_3 = 1)$ signifie qu'on a eu un changement, qui peut avoir eu lieu au 2e ou au 3e lancer, tandis qu'on peut commencer soir par Pile soit par Face donc :
$$(X_3 = 1) = P_1P_2F_3 \cup P_1F_2F_3 \cup F_1F_2P_3 \cup F_1P_2P_3$$
donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
$$P(X_3 = 1) = p^2q + q^2p + q^2p + p^2q = pq(2p + 2q) = 2pq(p + q) = 2pq.$$
Enfin $(X_3 = 2)$ signifie qu'on a changé eu 2e puis au 3e lancer donc selon le résultat du premier lancer :
$$(X_3 = 2) = P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3$$
donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
$$P(X_3 = 2) = p^2q + q^2p = pq(p + q) = pq.$$

   (b) X_3 est finie donc admet des moments de tous ordres. Pour le calcul on utilise la définition de l'espérance pour $E(x)$ puisqu'on connaît sa loi, puis le théorème de transfert pour $E(X^2)$ car on connaît la loi de X mais pas celle de X^2, et enfin la formule de Koenig-Huyghens :
$$E(X_3) = 0 \times (p^3 + q^3) + 1 \times 2pq + 2 \times pq = 4pq$$
puis
$$E(X_3^2) = 0^2 \times (p^3 + q^3) + 1^2 \times 2pq + 2^2 \times pq = 6pq$$
et enfin
$$V(X_3) = E(X_3^2) - [E(X_3)]^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

3. (a) On obtient $X_4(\Omega) = \{0;1;2;3\}$ puis :
   — $(X_4 = 0)$ signifie aucun changement donc on a le même résultat tout du long :
$$(X_4 = 0) = P_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3F_4$$
et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
$$P(X_4 = 0) = p^4 + q^4.$$

— $(X_4 = 1)$ signifie qu'il y a un changement qui peut être au 2e, 3e ou 4e lancer, et on peut commencer par Pile ou par Face :

$$(X_4 = 1) = P_1F_2F_3F_4 \cup P_1P_2F_3F_4 \cup P_1P_2P_3F_4 \cup F_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3P_4$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 1) = pq^3 + p^2q^2 + p^3q + p^3q + p^2q^2 + pq^3 = 2pq(q^2 + p^2 + pq).$$

— $(X_4 = 2)$ signifie qu'il y a eu deux changement qui peuvent survenir au 2e et 3e, 2e et 4e ou 3e et 4e lancer, et on peut commencer par Pile ou Face :

$$(X_4 = 2) = P_1F_2P_3P_4 \cup P_1F_2F_3P_4 \cup P_1P_2F_3P_4 \cup F_1P_2F_3F_4 \cup F_1P_2P_3F_4 \cup F_1F_2P_3F_4$$

donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 2) = p^3q + p^2q + p^3q + pq^3 + p^2q^2 + pq^3 = 2pq(p^2 + q^2 + pq).$$

— Enfin $(X_4 = 3)$ signifie qu'on change à chaque lancer, donc selon le résultat du premier lancer :

$$(X_4 = 3) = P_1F_2P_3F_4 \cup F_1P_2F_3P_4$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_4 = 3) = 2p^2q^2.$$

(b) Puisqu'on connaît la loi de X_4 on utilise la définition :

$$\begin{aligned} E(X_4) &= 0 \times (p^4 + q^4) + 1 \times 2pq(q^2 + p^2 + pq) + 2 \times 2pq(q^2 + p^2 + pq) + 3 \times 2p^2q^2 \\ &= 6pq(q^2 + p^2 + pq) + 6p^2q^2 = 6pq(q^2 + p^2 + pq + pq) = 6pq(p^2 + q^2 + 2pq) = 6pq(p + q)^2 \\ &= 6pq \times 1^2 = 6pq. \end{aligned}$$

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. $(X_n = 0)$ signifie qu'on a le même résultat à tous les lancers donc selon le premier lancer :

$$(X_n = 0) = P_1 \dots P_n \cup F_1 \dots F_n$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$P(X_n = 0) = p^n + q^n.$$

2. $(X_n = 1)$ signifie qu'on a eu un seul changement qui peut intervenir du 2e au n-e lancer, et on peut commencer par Pile ou par Face :

$$\begin{aligned} (X_n = 1) = \quad & P_1F_2 \dots F_n \cup P_1P_2F_3 \dots F_n \cup \dots \cup P_1 \dots Pn - 2F_{n-1}F_n \cup P_1 \dots P_{n-1}F_n \\ & \cup F_1P_2 \dots P_n \cup F_1F_2P_3 \dots P_n \cup \dots \cup F_1 \dots Fn - 2P_{n-1}P_n \cup F_1 \dots F_{n-1}P_n \end{aligned}$$

Par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= \left(pq^{n-1} + p^2q^{n-2} + \dots p^{n-2}q^2 + p^{n-1}q\right) + \left(qp^{n-1} + q^2p^{n-2} + \dots + q^{n-2}p + q^{n-1}p\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} p^kq^{n-k} = 2q^n \sum_{k=1}^{n-1} (pq^{-1})^k = 2q^n \times pq^{-1} \times \frac{1 - (pq^{-1})^{n-1}}{1 - pq^{-1}} \\ &= 2pq^{n-1} \times \frac{1 - p^{n-1}q^{1-n}}{1 - pq^{-1}} = 2pq \times \frac{q^{n-2} - p^{n-1}q^{-1}}{1 - \frac{p}{q}} \\ &= 2pq \times \frac{q^{n-2} - p^{n-1}q^{-1}}{\frac{q-p}{q}} = 2pq^2 \times \frac{q^{n-2} - p^{n-1}q^{-1}}{q - p} = \frac{2pq}{q - p}(q^{n-1} - p^{n-1}). \end{aligned}$$

3. $X_n = n-1$ signifie qu'on a eu $n-1$ changements donc on a changé a chaque lancer du 2e au n-e : séparons comme demandé selon la parité de n :
   — Si n est pair, alors n s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$: on a alors :
   $$(X_n = n-1) = P_1F_2P_3F_4 \dots P_{2k-1}F_{2k} \cup F_1P_2F_3P_4 \dots F_{2k-1}P_{2k}$$
   donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
   $$P(X_n = n-1) = p^kq^k + q^kp^k = 2p^kq^k = 2(pq)^{\frac{n}{2}}.$$
   — Si n est impair alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$: on a alors :
   $$(X_n = n-1) = P_1F_2P_3F_4 \dots P_{2k-1}F_{2k}P_{2k+1} \cup F_1P_2F_3P_4 \dots F_{2k-1}P_{2k}F_{2k+1}$$
   donc par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
   $$P(X_n = n-1) = p^{k+1}q^k + q^{k+1}p^k = p^kq^k(p+q) = (pq)^k \times 1 = (pq)^{\frac{n-1}{2}}.$$
4. X_n compte le nombre de changements et Z_k compte s'il y eu changement ou pas lors du k-e tirage ; comme les changements peuvent avoir lieu de 2e au n-e tirage, X_n est la somme :
   $$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k.$$
   On en déduit par linéarité de l'espérance que :
   $$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} E(Z_k).$$
   Il faut donc calculer $E(Z_k)$: puisque c'est une loi de Bernouilli, il suffit de calculer son paramètre. On cherche donc $P(Z_k = 1)$.

   Or $(Z_k = 1)$ signifie qu'il y a un changement lors du $k-e$ lancer, donc que les lancers n° $k-1$ et k donnent des résultats différents. Comme ce cela ne dépend aucunement des lancers précédents et que les résultats des lancers $k-1$ et k non plus (les lancers sont mutuellement indépendants) on peut écrire simplement :
   $$(Z_k = 1) = P_{k-1}F_k \cup F_{k-1}P_k$$
   et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers :
   $$P(Z_k = 1) = 2pq.$$
   Enfin on en déduit que pour tout k, Z_k suit la loi de Bernouilli de paramètre $2pq$ donc admet une espérance égale à $2pq$, et enfin :
   $$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n} 2pq = 2pq(n-1).$$

Partie 3 : simulation

1. ```
   function X=nbr_changements(n,p)
       X=0
       L=grand(1,n,'bin',1,p)
       for k=2:n do
           if L(k) <> L(k-1) then
               X=X+1
           end
       end
   endfunction
   ```
2. Ce programme répète 10000 fois l'épreuve précédente (lancer $n = 10$ pièces et compter le nombre de changements à chaque fois) ; puis il calcule dans la variable S le nombre de fois où il n'y a eu qu'un seul changement au cours des n lancers.
   A la fin du programme, l'instruction `f=S/10000` calcule la fréquence de la modalité 1 pour la variable aléatoire X_n au cours des 10000 simulations de X_n.
   ```

3. • La première avelur affichée est la fréquence de l'évènement $[X_n = 1]$ au cours de 10000 simulations de la variable X_n.
   • La seconde valeur affichée est $\frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) = P(X_n = 1)$ d'après la question 2, partie 2.

   Or on sait que la fréquence de la modalité 1 pour X_n (de l'évènement $[X_n = 1]$) converge vers $P(X_n = 1)$ lorsqu'on simule la variable X_n un grand nombre de fois. Il est donc nomral que les deux valeurs soient proches.

Exercice 2. : **EDHEC 2012**

Partie 1 : préliminaires Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 \times \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On pose alors la fonction $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et on dérive ses 2 expressions (dérivable en tant que polynôme) :
1. $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ donc $g'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^{k-1}$;
2. $g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $g'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Partie 2 :

1. Loi de T_n

   (a) Si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $T_n = k$ signifie qu'on a lancé $k \leqslant n-1$ fois la pièce avant de s'arrêter.
   On n'a donc pas pu obtenir n faces, et on s'est arrêté sur un pile.
   Enfin les lancers précédents ne peuvent pas avoir donné pile, sinon on se serait arrêté après.

   D'où, si $k \geqslant 2$,
   $$P(T_n = k) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) = q^{k-1}p$$
   par indépendance des lancers,

   et si $k = 1$,
   $$P(T_n = 1) = P(P_1) = p = q^0 p$$
   donc la formule ci-dessus est encore valable.

   (b) $T_n = n$ peut avoir été obtenu de deux manières : avec n fois face ou avec $n-1$ fois face et une fois pile.
   On a donc :
   $$P(T_n = n) = P\big([F_1 \cap \cdots \cap F_n] \cup [F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n]\big) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$
   par incompatibilité, puis :
   $$P(T_n = n) = q^n + q^{n-1}p = q^{n-1}(q+p) = q^{n-1}$$
   par indépendance des lancers.

   (c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k = n$ qui n'a pas la même formule que les autres :
   $$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = p\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

(d) T_n étant finie, elle a une espérance et :

$$E(T_n) = p\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1}{1}$$

On aurait aussi pu prouver la formule de la somme des termes de la suite géométrique dérivée avec une récurrence, ou encore directement la valeur de la somme par récurrence, sans passer par la suite géométrique dérivée.

2. Loi de X_n.

a) et b) Lors des lancer, on a ou bien k Face puis un Pile et on s'arrête, ou bien n face et aucun pile et on s'arrête.

Donc $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ donc par indépendance des lancers, $P(X_n = 0) = q^n$.

Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n)$; X_n admet donc une espérance et $E(X_n) = 1 - q^n$.

3. Loi de Y_n

(a) Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $(Y_n = k)$ signifie que l'on a eu k Face (donc pas n) et donc ensuite un Pile, ce qui donne en écriture mathématique :

$(Y_n = k) = F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ donc par indépendance des lancers, $P(Y_n = k) = q^k p$.

(b) $(Y_n = n)$ signifie que l'on a eu n Face donc aucun pile (il ne peut y avoir plus de n lancers) d"où :

$(Y_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ et par indépendance, $P(Y_n = n) = q^n$.

(c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus donc $T_n = X_n + Y_n$ donc la linéarité de l'espérance donne :

$$E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = (1-q^n)\frac{1-1+q}{1-q} = (1-q^n)\frac{q}{1-q}$$

4. (a)
```
function [t,x,y]=simul(n,p)
   t=0,x=0,y=0
   while (x==0)&(t<n) do
        t=t+1
        if rand() >p then
           y=y+1
       else
           x=x+1
       end
   end
endfunction
```

(b) les termes p_k vérifient : $p_1 = p$ et $\forall k \in [\![2; n-1]\!]$, $p_k = qu_{k-1}$ donc suivent une relation de suite géométrique de raison q jusqu'au rang $n-1$.
On a donc $p_k = u_1 \times q^{k-1} = pq^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Enfin $p_n = q/pp_{n-1} = q/ppq^{n-2} = q^{n-1}$.

Cette fonction renvoit donc la loi (théorique) de la variable T_n.

(c) Ce programme mémorise 1000 simulations de la variable T_n dans un vecteur ligne `T` puis il tabule les valeurs obtenues c'est-à-dire qu'il renvoit une matrice dont la première colonne contient les modalités de T_n (différentes valeurs prises par la variable T_n lors des simulations) et la seconde colonne contient les effectifs correspondants.
La fréquence de l'évènement $[T_n = 5]$ au cours des 1000 simulations est donc $f = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} = 0,073$

(d) Le diagramme des fréquences de T_n sur 1000 simulations est très proche de la loi théorique de T_n . On retrouve la propriété : la fréquence d'un évènement A sur un grand nombre de simulations converge vers la probabilité mathématique de A.

Exercice 3. : **Edhec 2013**

1. (a) D'après l'énoncé, à chaque épreuve soit on tire une boule blanche et le nombre de boules blanches augmente de 1, soit on tire une noire et le nombre de boules blanches augmente de 1.

Donc $X_1(\Omega) = \{0; 2\}$ et en notant B_i l'évènement :

« On a tiré une boule blanche au i-ième tirage »

on obtient par équiprobabilité de tirer chaque boule de l'urne :

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_1 = 2) = \mathrm{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{4}$$

(b) On remarque que si $X_1 = 0$, il ne reste plus de boule blanche dans l'urne donc on tire forcément une boule noire au deuxième tirage. On a alors forcément $X_2 = 1$.

Si $X_1 = 2$, il y a 2 boules blanches et 4 noires d'ans l'urne pour le deuxième tirage donc on peut soit tirer une blanche avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et obtenir $X_2 = 1$, soit une noire avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et $X_2 = 3$.

Donc $X_2(\Omega) = \{1; 3\}$ et de plus en appliquant les probabilités totales avec le système complet d'évènements ($[X_1 = 0], [X_1 = 2]$) :

$$\mathrm{P}(X_2 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = 0)\,\mathrm{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + \mathrm{P}(X_1 = 2)\,\mathrm{P}_{(X_1=2)}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}_{(X_1=0)}(\overline{B_2}) + \frac{3}{4}\,\mathrm{P}_{(X_1=2)}(B_2)$$

et on peut calculer avec les probabilités conditionnelles explicitées ci-dessus :

$$\mathrm{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

De même on a :

$$\mathrm{P}(X_2 = 3) = \mathrm{P}(X_1 = 0)\,\mathrm{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 3) + \mathrm{P}(X_1 = 2)\,\mathrm{P}_{(X_1=2)}(X_2 = 3) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

(c)
```
tirage=floor(rand()*4)
     if tirage==0 then
         X1=0
    else
         X1=2
    end
    if (X1==0) then
        X2=1
     else
          tirage=floor(rand()*6)
                     if tirage<=1 then
                          X2=1
                      else X2=3
                     end
       end
disp(X2,X1)
```

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.
Pour tout j de $\mathbb{N}$, on note alors E_j l'évènement : « l'urne est dans l'état j initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = \mathrm{P}(E_j)$ et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

2. Avec le système complet d'évènements $(B_1, \overline{B_1})$ la formule des probabilités totales donne :

$$\mathrm{P}(E_n) = \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(E_n) + \mathrm{P}(\overline{B_1})\,\mathrm{P}_{\overline{B_1}}(E_n)$$

   — On obtient B_1 avec la probabilité $\frac{n}{2n+2}$ car il y a n boules blanches et $2n+2$ boules au total et elles sont toutes équiprobables.

   De plus dans ce cas on se retrouve dans l'état $(n-1)$, donc la probabilité qu'à partir de là les tirages s'arrêtent est $\mathrm{P}_{B_1}(E_n) = \mathrm{P}(E_{n-1}) = e_{n-1}$.

   — On obtient donc $\overline{B_1}$ avec la probabilité $1 - \frac{n}{2n+2} = \frac{n+2}{2n+2}$.

   Si on a eu $\overline{B_1}$, on se retrouve dans l'état $(n+1)$, donc la probabilité qu'à partir de là les tirages s'arrêtent est $\mathrm{P}_{\overline{B_1}}(E_n) = \mathrm{P}(E_{n+1}) = e_{n+1}$.

   En remplaçant alors chaque probabilité par sa valeur, on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e_n = \frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}.$$

3. (a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n \geqslant e_{n+1}$.

   Initilisation : Par hypothèses $e_0 = 1$ et $e_1 = \mathrm{P}(E_1) \leqslant 1$ en tant que probabilité, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e_n \geqslant e_{n+1}$, on a alors :

$$e_{n+1} = \frac{n+1}{2n+4}e_n + \frac{n+3}{2n+4}e_{n+2}$$

   On sait que $e_n \geqslant e_{n+1}$ donc :

$$e_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{2n+4}e_{n+1} + \frac{n+3}{2n+4}e_{n+2}$$

   puis en isolant e_{n+2} :

$$e_{n+1}\left(1 - \frac{n+1}{2n+4}\right) \geqslant \frac{n+3}{2n+4}e_{n+2} \iff \frac{2n+4-(n+1)}{2n+4}e_{n+1} \geqslant \frac{n+3}{2n+4}e_{n+2} \iff e_{n+1} \geqslant e_{n+2}$$

   et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n \geqslant e_{n+1}$$

   (b) On en déduit que la suite (e_n) est décroissante.

   Or e_n est une probabilité donc la suite (e_n) est minorée par 0, elle est donc convergente.

$$\text{On admet pour la suite que } \lim_{n\to+\infty} e_n = 0.$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (n+1)e_n$.

   (a) On se sert de la relation que vérifie (e_n) : pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = (n+1)e_n = (n+1)\left(\frac{n}{2n+2}e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2}e_{n+1}\right) = (n+1)\left(\frac{n}{2n+2} \times \frac{u_{n-1}}{n} + \frac{n+2}{2n+2} \times \frac{u_{n+1}}{n+2}\right)$$

$$u_n = (n+1) \times \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2(n+1)} = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

   donc en isolant u_{n+1} :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

(b) La suite (u_n) est donc une suite récurrente double, dont on résout l'équation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

On a donc une solution double à l'équation caractéristique, il existe alors a et b tel que u_n s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a1^n + bn1^n = a + nb$$

Pour déterminer a et b on utilise des valeurs connues de (u_n) :

$$u_0 = (0+1)e_0 = 1 \times 1 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 2e_1$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{c} a + 0b = 1 \\ a + 1b = 2e_1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 2e_1 - a = 2e_1 - 1 \end{array} \right.$$

Enfin on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1 + (2e_1 - 1)n$$

(c) On divise par $(n+1)$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

Question astucieuse : il est impossible de calculer e_1 avec sa définition (on ne sait pas calculer cette probabilité sans une étude très complexe), on utilise alors le résultat admis par l'énoncé et qui n'a toujours pas servi :

$$\lim e_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} (2e_1 - 1)\frac{n}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n+1} = (2e_1 - 1) \times 1 + 0$$

donc on obtient :

$$2e_1 - 1 = 0 \Longleftrightarrow e_1 = \frac{1}{2}$$

et enfin :

$$e_n = \frac{1}{n+1}$$