Indications du devoir maison n° 4

Exercice 1.

1. Voir les différentes méthodes pour montrer qu'une matrice est/ n'est pas inversible (listées dans le Td calcul matriciel) .

2. En l'absence de suggestion des valeurs propres ou des vecteurs propres de A, et en l'absence de suggestion d'un polynôme annulateur de A, on est obligés de revenir à $A - \lambda I$.

3. On devrait résoudre l'équation $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$ d'inconnue X pour chaque valeur propre λ obtenue précédemment mais en pratique on résout l'équation équivalente $T_\lambda X = 0$ (plus simple car déjà triangulaire).

4. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel E, on doit toujours se demander si on connait déjà la dimension de cet espace :
   - Si la dimension de l'espace E est inconnue : on doit montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre mais aussi montrer qu'elle est génératrice de E en mettant E sous la forme $E = Vect(\mathcal{F})$ (i.e. on revient à la définition d'une base).
   - Si la dimension de l'espace E est connue : on ne montre qu'une seule des propriétés entre libre et génératrice de E et on vérifie que $card(\mathcal{F}) = dim(E)$:alors, si ces deux conditions sont vérifiées, c'est une base de E, même si on n'a pas prouvé explicitement soit libre, soit génératrice (i.e. on utilise le théorème appelé "caractérisation des bases en dimension finie").

5. • utiliser le théorème : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une <u>base</u> $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   Alors, par définition d'une matrice diagonalisable, A s'écrira PDP^{-1} avec P matrice inversible dont les colonnes sont une base de vecteurs propres de A et D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres correspondantes (l'ordre des valeurs propres doit coïncider avec l'ordre des vecteurs propres).

   Attention : on vous demande que chaque vecteur propre choisi ait pour premier coefficient 1 : si un de vos vecteurs X_i ne vérifie pas cette propriété, il faut prendre un vecteur de la forme λX_i qui convient : en effet, il est colinéaire à X_i donc c'est aussi un vecteur propre associé à la même valeur propre (car un espace propre est tjrs un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).

6.

7. Remarque : si 2 matrices A et B sont <u>semblables</u> (i.e. il existe P telle que $A = PBP^{-1}$) alors on a toujours : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
   Mais ce n'est pas une propriété du cours donc il faut toujours le reprouver par récurrence.

8. Pour isoler D^n dans l'égalité obtenue à la question précédente, il faut simplifier les P et P^{-1} en trop : pour enlever une matrice dans une équation, on multiplie du bon côté par son inverse (et surtout on ne fait pas des division de matrices, comble de l'horreur !)

9. les matrices de l'ensemble E sont définies par une équation ($AM = MA$) dont on ne connait pas les solutions : elles ne sont pas définies explicitement (on dit que E est un ensemble implicite) .
   Lorsqu'un ensemble est implicite, on montre que c'est un espace vectoriel par caractérisation des sous-espaces vectoriels.

10. • les matrices de F sont explicites (on connait leur forme).
    Lorsqu'un ensemble est implicite, on montre que c'est un espace vectoriel en le mettant sous la forme $F = Vect(.....)$.
    On plus, ça fait 2 en 1 car on a trouvé une famille génératrice de F par la même occasion.

• Ne pas oublier que "génératrice" ne suffit pas pour obtenir une base : il faut en extraire une famille génératrice qui est aussi libre :
On vérifie si la famille est libre : si c'est le cas, c'est ok, sinon, on enlève le vecteur "en trop" (celui qui s'exprime en fct des autres) et on recommence le processus...

11. Pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, il n'y a qu'une seule méthode : on montre que toute matrice M de F appartient forcément à E :
La rédaction du raisonnement est la suivante : soit M une matrice quelconque de F , c'est -à-dire M vérifie (est de la forme) ..... montrons que M appartient forcément à E c'est-à-dire qu'elle vérifie .....

12. (a) Attention : que on vous demande de montrer que 2 équations sont équivalentes, il ne faut PAS résoudre les équations.
Il faut juste partir de l'une des équations et la transformer en une équation plus simple (utiliser les liens entre A et D et entre M et N donnés par l'énoncé)

    (b) Là, par contre on vous demande de résoudre l'équation. Pour résoudre une équation matricielle, il faut poser une matrice avec des coefficients inconnus.

    (c) Attention, les matrices N trouvées à la question précédente (vérifiant $DN = ND$) ne sont pas les solutions de l'équation $AM = MA$. Il faut en déduire la forme des matrices M.

Exercice 2.

1. Pour calculer une probabilité on doit :
- Décomposer en français (dans sa tête, ou au brouillon) en toutes les manières de l'obtenir, en utilisant les évènements élémentaires correspondant à chaque épreuve successive.

- Traduire cette décomposition en mathématique avec des intersections pour les épreuves successives, et des unions pour les différents cas.

- Utiliser l'incompatibilité (qui doit toujours être signalée !) pour les unions.

- Pour les intersections, on utilise l'indépendance (en la signalant !) si il y a bien indépendance. Sinon, on utilise les probabilités composées.

2. (a) Idem.
   (b) Idem
   (c) Ecrire la somme obtenue avec le symbole $\sum$ et calculer la somme.
   (d) L'évènement $X = 0$ est compliqué à traduire ("jamais" est toujours difficile à traduire). Lorsqu'il ne reste qu'une seule valeur de X dont on doit calculer la probabilité, on utilise le fait que les valeurs de X forment un s.c.e pour trouver la dernière valeur.
   Ou dit autrement : on calcule la proba de l'évènement contraire pour en déduire cette proba.
3. (a) Pas de maths ici : il s'agit de bien comprendre l'énoncé puis d'expliquer ce que demande l'énoncé.

   (b) La question précédente vous a fait trouvé un évènement conditionnel à l'évènement P_1 ("si le premier lancer est un plie"), elle vous invite donc à utiliser le s.c.e. des résultats du premier lancer $\{P_1; F_1\}$.
   (c) - Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on essaie d'écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour faire apparaître $u_{n+1} = u_n + r$, où r est une constante à déterminer.

   - Quand une suite est arithmétique, on sait écrire son terme général en fonction de u_0 et de n, ou bien de u_1 et de n, ou bien...

4. Il faut écrire la formule de l'espérance, puis mettre en oeuvre le calcul de somme. Attention à faire la différence entre somme finie et série.
5.

Exercice 3.

1. (a) On cherche donc un signe : on factorise au maximum puis on étudie le signe de chaque facteur (premier ou deuxième degré en une variable $X = u(x)$, somme de termes de même signe ou étude de fonction).

   (b) Deux problèmes à régler : le quotient et le ln.

2. (a) – Très classique : sur un intervalle ou la fonction a une seule définition, on utilise les opérations élémentaires.

   – En un point particulier a, on revient à la définition donc à une limite au point a.

   – Une limite en un point a fini doit toujours se ramener à une limite en 0 avec le changement de variable adéquat.

   – Pour une limite en 0, on factorise au maximum et on simplifie, puis on factorise toutes les sommes par leurs termes prépondérants et on simplifie, et enfin on utilise un DL en une variable u qui tend vers 0 si on reconnaît une forme usuelle et on continue les factorisations par les termes prépondérants. Avant chaque étape, on pensera à essayer de conclure par les opérations élémentaires ! !

   (b) En un point particulier, on revient à la définition donc à une limite en 0 (dont la méthode est donnée à la question 2a).

3. (a) Sur un intervalle ou la fonction a une seule définition, on utilise les opérations élémentaires. Le calcul de dérivé ne présente pas de difficulté particulière.

   (b) Méthode identique aux limites en 0 (vue plus tôt).

   (c) On cherche un signe, la méthode a été donné à la question 1a.

4.
5.

Exercice 4.

1. (a) On revient à la définition, et on n'oublie les méthodes de calcul de limite en 0 : factorisation au maximum, puis si besoin factorisation des sommes par leur termes prépondérants, puis si besoin recours aux DL.
   Avant chacune de ces étapes on vérifie bien sûr si on ne peut pas conclure directement par opérations sur les limites !

   (b) On revient également à la définition avec la même méthode de calcul de limite.

2. (a) – Evident jusqu'au calcul de signe.

   – Pour calculer un signe, on factorise au maximum puis on étudie le signe de chaque facteur en étudiant éventuellement une fonction pour chaque facteur "récalcitrant".

   (b) – Les limites en $\pm\infty$ ne posent aucun problème.

   – En 0^-, on a une forme indéterminée avec un produit d'exponentielle, qui se règle en croissances comparées. Pour cela il faut poser $X = \frac{1}{x}$ pour faire apparaître une "vraie" croissance comparée.

   – L'autre possibilité habituelle (tout passer dans une seule exponentielle) requiert de la finesse car x est négatif (0^-) donc $\ln(x)$ n'existe pas : il faut écrire $x = -(-x) = -(e^{\ln(-x)})$.

3. (a) Evident.
   (b) Utiliser le DL précédent pour la bonne fonction u tendant vers 0 (pas très difficile à idetifier...)

   (c) – Une asymptote au voisinage de $+\infty$ (resps $-\infty$) est une droite (qui a donc une équation de la forme $y = ax + b$) telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - (ax+b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) - (ax+b) = 0$). La courbe de f_n "tend" alors vers son asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
   – Pour la position de la courbe, on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$ au voisinage de $\pm\infty$.

   – Attention, la position n'a aucune raison d'être la même des deux côtés : il faut bien faire les deux calculs.

   – Pour obtenir un signe "au voisinage de", il faut trouver un équivalent simple et chercher le signe de cet équivalent ; on obtient un équivalent en factorisant au maximum puis en factorisant toutes les sommes par leur terme prépondérant, et enfin en utilisant le fait que chaque facteur qui tend vers une limite finie non nulle est équivalent à cette limite.

   (d) Ne rien oublier : asymptote et position de la courbe, point(s) particulier(s) vus précédemment, variations correctes, etc...

4. (a) Question ultra classique : on utilise le théorème de bijection continue/monotone.

   (b) – (u_n) est une suite implicite : toute inégalité s'obtient en comparant les images par f_n des deux valeurs à comparer.
   – Pour montrer qu'un nombre est solution d'une équation, on vérifie que (ici) : $u_n \ln(u_n) = n$.

   – Pour cela on ne peut utiliser qu'une seule chose : la définition de u_n où on explicite la fonction, qui est la seule égalité explicite impliquant u_n : $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$.

   (c) – Ne pas oublier de justifier que g^{-1} existe.

   – u_n est maintenant définie sous une seconde forme : $g(u_n) = n$, qui permet d'expliciter u_n en fonction de g^{-1}.

   – Les limites de g^{-1} s'obtiennent par lecture inverse du tableau de variation de g.

   (d) – De nouveau on ne peut utiliser que la relation $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ ou une de ses conséquences.

   – Une fois la relation obtenue, la recherche d'équivalent de $\ln(u_n)$ se fait en factorisant les sommes par leur terme prépondérant puis en cherchant des limites finies non nulles qui donnent des équivalents égaux à ces limites.

   – TRES GROS PIEGE : on ne peut pas composer les équivalents !!!

   – Pour obtenir un équivalent de u_n, il faut revenir à une relation précédente impliquant u_n.

5. (a) Deux méthodes selon la définition de (u_n) utilisée :
   – Avec la première (avec f_n qui varie), on compare u_n et u_{n+1} en les composant par la même fonction (soit f_n soit f_{n+1}) et en essayant de simplifier le $f_n(u_{n+1})$ en faisant apparaître $f_{n+1}(u_{n+1})$ (ou la même chose avec $f_{n+1}(u_n)$ et $f_n(u_n)$.

   – Avec la seconde (avec g qui ne varie pas), on compare u_n et u_{n+1} en les composant par g (ce qui est beaucoup plus simple, mais on n'a pas toujours le luxe d'avoir deux définitions différentes de la suite implicite...)

   (b) Il faut se débrouiller pour faire apparaître $f_{n+1}(u_{n+1})$ que l'on connaît.

6. On pose $I_n = \int\limits_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$.

(a) – Pour obtenir un encadrement, on sépare en deux inégalités.

– Pour minorer ou majorer une intégrale, on minore ou majore l'intérieur et on intègre l'inégalité avec des bornes croissantes ou décroissantes (à déterminer précisément ! !).

– On obtient enfin l'inégalité cherchée en divisant celle obtenue par intégration.

(b) Un encadrement dont les membres extrémaux sont équivalents donne un équivalent de celui du milieu : il suffit de diviser par cet équivalent commun pour obtenir un encadrement de termes tendant vers1 (ici ce travail est déjà fait).

(c) – On demande la nature uniquement, on passe par un théorème de comparaison.

– On n'oublie pas de justifier que les séries sont à termes positifs.

– On utilise dans l'ordre : une inégalité donnée par l'énoncé, sinon un équivalent, sinon une négligeabilité devant le terme général d'une série de référence (la plupart du temps Riemann) : ici il est évident que c'est un équivalent.

– La série de l'équivalent n'étant pas une série de référence (on ne connaît même pas la valeur en fonction de n), il n'y a qu'un seul moyen (qui doit se repérer facilement) de déterminer sa convergence...