Correction du devoir maison $n^{o} 4$

Exercice 1.

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1. A a deux colonnes (1 et 2) égales donc n'est pas inversible. (On peut aussi dire que les lignes 1 et 2 sont égales).
- 2. On cherche les valeurs de λ pour les quelles $A-\lambda I$ n'est pas inversible, cherchons une réduite triangulaire :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 - \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & \lambda & 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) \end{pmatrix}$$

$$\iff L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2 \qquad T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 - \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec

$$P(\lambda) = 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) + \lambda - 2 = \lambda - 1 - (1 - \lambda)(3 - \lambda) = (\lambda - 1)[1 + (3 - \lambda)] = (\lambda - 1)(4 - \lambda)$$

Les valeurs de λ pour les quelles $A-\lambda I$ n'est pas inversible sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, soit les solutions de :

$$-\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ et } \quad P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4 \quad , \quad \text{ donc } S = \{0; 1; 4\}$$

3. On cherche $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A - 0I)X = 0\}$:

On résout, avec
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
:

$$AX = 0 \iff T_0 X = 0$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc on en déduit que :

$$E_0(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tq } y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc générateur de $E_0(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_0(A)$.

On cherche $E_1(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A - I)X = 0 \}$:

$$(A-I)X = 0 \iff T_1X = 0$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2z = 0 \\ -y-z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc on en déduit que :

$$E_1(A) = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tq } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donc générateur de $E_1(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_1(A)$.

On cherche $E_4(A) = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A - 4I)X = 0 \} :$

$$(A-4I)X = 0 \iff T_4X = 0$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z = 0 \\ -4y+2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc on en déduit que :

$$E_4(A) = \left\{ z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tq } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

Le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est donc générateur de $E_4(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_4(A)$.

4. On résout l'équation
$$aX_1+bX_2+cX_3=\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a & +b & +c & =0\\ a & +b & -c & =0\\ -b & +2c & =0 \end{cases} \Leftrightarrow (L_2\leftarrow L_2-L_1) \begin{cases} a & +b & +c & =0\\ -2c & =0 & \Leftrightarrow\\ -b & +2c & =0 \end{cases}$$
 $a=b=c=0.$ La famille $\mathcal B$ est donc libre et $card(B)=3=dim(\mathcal M_{3,1}(\mathbb R))$ donc c'est une base de $\mathcal M_{3,1}(\mathbb R)$.

5. On a trouvé une famille B de vecteurs propres qui forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et plus précisément, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A = PDP^{-1}$.

Pour déterminer P^{-1} , on résout cette question avec la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette réduite triangulaire n'a aucun 0 sur la diagonale donc P est inversible.

$$\iff \begin{array}{c}
L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\
E_2 \leftarrow 3L_2 - L_3
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
6 & 6 & 0 & | & 5 & -1 & -2 \\
0 & 6 & 0 & | & 2 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 6 & | & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c}
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
E_1 \leftarrow 1/6L_1 \\
E_2 \leftarrow 1/6L_2 \\
E_3 \leftarrow 1/6L_3
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & | & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\
0 & 0 & 1 & | & 1/6 & 1/6 & 1/3
\end{pmatrix}$$

donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- - (b) La matrice D confirme bien que les valeurs propres de A sont 0, 1 et 4. De plus les trois vecteurs colonnes obtenus sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres correspondantes de D car ils sont respectivement colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

on a bion and base de 1113,1(22) constitute de 1000cars propres

- 7. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$:
 - Initialisation : pour n = 0, on a

$$A^0 = I$$
 et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

donc la propriété est vraie au rang n=0.

• **Hérédité**: on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$, alors:

$$A^{n+1} = A^n A = PD^n P^{-1} PDP^{-1} = PD^n IDP^{-1} = PD^n DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

• Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

8. On en déduit alors que :

$$P^{-1}(A^n)P = P^{-1}(PD^nP^{-1})P = ID^nI = D^n$$

donc $D^n = P^{-1}A^nP$.

On pose E et F les ensembles suivants :

$$E = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA \}$$

 et

$$F = \left\{ M = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix} \text{ tel que } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- 9. E est un ensemble implicite, on applique la caractérisation des sous-espaces vectoriels:
 - $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition de E).
 - La matrice nulle vérifie A0 = 0A = 0, donc $0 \in E$.
 - Soient $M_1, M_2 \in E$ donc tels que $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$, alors :

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

et $(M_1 + M_2) \in E$, qui est donc stable par somme.

• Soit $M \in E$ donc tel que AM = MA et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$

et $(\lambda M) \in E$, qui est donc stable par produit par un scalaire.

- Finalement, ces quatre propriétés permettent d'affirmer que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 10. F est défini de manière explicite, on écrit donc :

$$\begin{split} F &= \left. \left\{ M = a \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ tel que } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right] = \operatorname{Vect}[B, C, D] \end{split}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices B, C et D qui sont dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille (B,C,D) est génératrice de F, montrons qu'elle est libre :

on résout l'équation $aB + bC + cD = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (faire le calcul).

La famille (B, C, D) est donc une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

11. Soit $M \in F$, donc il existe a, b et c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix}$$

Pour vérifier si M est dans E, on calcule AM et MA:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ -2b + 8c & -2b + 8c & 6b + 16c \end{pmatrix}$$

ot

$$MA = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c & -3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -3a + 2b + c & 3a + 2b + c & -2b + 2c \\ -2b + 2c & -2b + 2c & 2b + 4c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ 2b + 4c & 2b + 4c & -2b + 8c \\ -2b + 8c & -2b + 8c & 2b + 16c \end{pmatrix}$$

donc M vérifie bien AM = MA, donc $M \in E$. On en déduit finalement que tous les éléments de F sont aussi dans E, donc $F \subset E$.

- 12. On cherche à présent à prouver que E = F.
 - (a) On remarque que $N=P^{-1}MP \iff M=PNP^{-1}$, puis avec P et P^{-1} inversibles qui permettent de raisonner par équivalence :

$$M \in E \iff AM = MA \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff P(DN)P^{-1} = P(ND)P^{-1}$$
 $\iff P^{-1}[PDNP^{-1}]P = P^{-1}[PNDP^{-1}]P \iff DN = ND.$

(b) Soit $N=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on résout :

$$DN = ND \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ d = 0 & 0 = 0 & 3f = 0 \\ 4g = 0 & 3h = 0 & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = a & b = 0 & c = 0 \\ d = 0 & e = e & f = 0 \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g = 0 & h = 0 & i = i \end{pmatrix}$$

(c) On en déduit qu'une matrice M de E vérifie :

$$M \in E \Longleftrightarrow DN = ND \Longleftrightarrow N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Longleftrightarrow M = PNP^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}$$

On calcule ce produit et on obtient :

$$\begin{split} M &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3a + 2e + i & -3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -3a + 2e + i & 3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -2e + 2i & -2e + 2i & 2e + 4i \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = aB + eC + iD \end{split}$$

et on obtient finalement :

$$E = \text{Vect}[B, C, D] = F.$$

Exercice 2.: EDHEC 1998

1. Pour avoir X=2, il faut avoir obtenu la séquence PF au bout de deux lancers donc :

$$(X = 2) = P_1 \cap F_2$$

et par indépendance des lancers,

$$P(X = 2) = P(P_1) P(F_2) = \frac{1}{4}$$

2. (a) Pour avoir (X = 3), il faut P_2F_3 impérativement, et les deux possibilités P_1 et F_1 conviennent pour donner X = 3 donc :

$$(X = 3) = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des lancers,

$$P(X=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

(b) Dès qu'on obtient un pile, on doit impérativement obtenir des piles jusqu'au k-1ème lancer (sinon l'enchaînement pile -face sera réalisé trop tôt) puis face au k-ième, ce qui donne :

$$(X = k) = (P_1 \dots P_{k-1} F_k) \bigcup (F_1 P_2 \dots P_{k-1} F_k) \bigcup \dots \bigcup (F_1 \dots F_{k-2} P_{k-1} F_k)$$

évènements qui sont bien 2 à 2 incompatibles.

(c) Par indépendance des lancers, chacun des évènements de la réunion est de probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc par incompatibilité 2 à 2 de la réunion :

$$P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

(d) (X = 0) est très pénible à décomposer selon les lancers (c'est possible mais il faut manipuler correctement les réunions et intersections infinies) donc on passe par son contraire :

$$\overline{(X=0)} = (X \ge 2) = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (X=k)$$

car la valeur X=1 est impossible. On en déduit par incompatibilité que

$$P(X = 0) = 1 - P(X \ge 2) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1 - 1 = 0.$$

3. (a) C'est ce qu'on a déjà vu avant : s'il y avait un face plus tôt, X prendrait la valeur du lancer en question.

Il faut et il suffit donc que $P_2 \dots P_{k-1} F_k$ se réalise.

(b) On applique les probabilités totales sur le système complet (P_1, F_1) : pour tout $k \geq 3$,

$$P(X = k) = P(P_1) P_{P_1}(X = k) + P(F_1) P_{F_1}(X = k)$$
$$= \frac{1}{2} P_{P_1}(P_2 \dots P_{k-1}F_k) + \frac{1}{2} P_{F_1}(X = k)$$

en appliquant le résultat de la question 3)a). De plus P_1 est indépendant de tous les lancers suivants donc :

$$P_{P_1}(P_2 \dots P_{k-1}F_k) = P(P_2 \dots P_{k-1}F_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

De plus si F_1 est réalisé, on se retrouve dans une situation identique au début, mais avec un lancer de moins restant. On en déduit que

$$P_{F_1}(X = k) = P(X = k - 1).$$

On obtient finalement:

$$P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}P(X = k - 1) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}$$

(c) Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$u_{k+1} = 2^{k+1} P(X = k+1) = 2^{k+1} \left(\frac{1}{2} P(X = k) + \frac{1}{2^{k+1}} \right) = 2^k P(X = k) + 1 = u_k + 1.$$

La suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est donc arithmétique de raison 1, et on a pour tout $k\geq 2$,

$$u_k = u_2 + (k-2) \times 1 = 2^2 P(X=2) + k - 2 = 1 + k - 2 = k - 1.$$

Enfin on obtient à nouveau :

$$P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}.$$

4. On considère la série

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On reconnaît une série géométrique dérivée seconde qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et qui est à termes positifs, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet une espérance, et :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4} \times (2 \times 8) = 4.$$

(b) On définit un vecteur ligne ${\tt C}$ dont les cases sont toutes nulles avant simulations. Puis on effectue 1000 simulations indépendantes de la variable X et, pour chacune de ces simulations, on rajoute 1 à la case de C dont le numéro est la valeur prise par la simulation.

A la fin des 1000 expériences, pour tout $n \in [1, 20]$, la case numéro n de C (C(n)) contient donc l'effectif de la modalité n i.e. le nombre de fois où la fonction simulX() a renvoyé la valeur nau cours des 1000 simulations.

Autrement dit, la cse numéro n de C est le compteur de la modalité n.

(c) Le vecteur ligne C contenant les effectifs des modalités 1 à 20, alors C/1000 est la liste des fréquences des modalités 1 à 20 après 1000 simulations.

L'instruction bar(1:20,C/1000) construit donc le diagramme en bâton des fréquences des modalités 1 à 20 après 1000 simulations.

On remarque que la variable puissances contient les valeurs de la suite (s_k) définie par $s_1 = 1/2$ et $\forall k \in [2, +\infty], s_{k+1} = 1/2s_k$.

On reconnait aisni une suite géométrique de forme explicite $s_k = \frac{1}{2^k}$.

Ainsi, la case numéro k du tableau L contient la valeur $\frac{k-1}{2^k} = P(X = k)$. : c'est le tableau de la loi théorique de X restreint à l'ensemble [1, 20].

On sait que la fréquence d'une valeur k converge, lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$, vers la probabilité théorique P(X=k).

Ainsi, il est logique que pour 1000 simulations, le diagramme en bâton des fréquences soit proche du diagramme en bâton de la loi théorique, avec une certaine marge d'erreurs car on n'a pas fait une infinité de simulations!

(d) • Première version : on ne garde pas en mémoire les valeurs des anciennes simulations et on calcule "à la main" la moyenne des valeurs :

```
n=input('Entrer n :')
S=0
for k=1:n do
    S=S+simulX()
end
m=S/n
```

• Seconde version: on garde en mémoire toutes les simulations dans un vecteur ligne (beaucoup moins efficace informatiquement parlant) et on utilise la fonction sum ou la fonction |mean| pour calculer la moyenne à la fin.

n=input('Entrer n :')

U=zeros(1,n)

for k=1:n do

U(k)=simulX()

end

m=mean(U) % ou m=sum(U)/n

La moyenne empirique m de n simualtions indépendantes de la même variable converge lorsque n tend vers $+\infty$ vers E(X)=4.

On devrait donc $m \simeq 4$.

Exercice 3.

| : EDHEC 2007|

1. (a) On pose $g: x \mapsto x - \ln(x)$ qui est définie et dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$$

qui est négative pour $x \le 1$ et positive pour $x \ge 1$ et ne s'annule qu'en x = 1.

g est donc strictement décroissante sur]0;1] et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et admet un minimum en 1, égal à

$$g(1) = 1 - \ln 1 = 1$$

et on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \ge g(1) = 1 > 0$$

- (b) On en déduit que le dénominateur $x \ln(x)$ ne s'annule pas dur \mathbb{R}_+^* , donc la fonction est bien définie sir \mathbb{R}_+^* et en 0, donc le domaine de définition de f est \mathbb{R}_+ .
- 2. (a) f est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En 0 on a:

$$f(x) = \frac{\ln x}{-\ln(x)\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \frac{1}{0 - 1} = -1 = f(0)$$

par opérations élémentaires sur les limites, et f est continue en 0.

f est donc continue sur $D = \mathbb{R}^+$.

(b) On a calcule pour x > 0,

$$T_0 = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \frac{\frac{\ln x + x - \ln x}{x - \ln x}}{x} = \frac{1}{x - \ln x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

3. (a) f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln x) - \ln x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \frac{\ln x}{x} - \ln x + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

(b) On factorise le numérateur par le terme prépondérant :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{0}{1 - 0} = 0$$

car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

(c) On étudie le signe de f' sur $]0; +\infty[$; comme le dénominateur est un carré, il est positif et f' est du signe de $1 - \ln x$, donc strictement positive pour 0 < x < e, strictement négative pour x > e et nulle pour x = e. :

x	0		1		e		$+\infty$
f'(x)	0	+		+	0	_	
f(x)	-1 -		0		→ <u>1</u>		~ ₀
f(x)		_	0	+		+	

- 4. On cherche les valeurs où f s'annule pour conclure avec le tableau de variation : on résout l'équation f(x) = 0.
 - Pour x = 0, on a $f(0) = -1 \neq 0$.
 - pour $x \neq 0$ on a

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$$

On le rajoute dans le tableau de variation et on en déduit que f(x) < 0 pour x < 1, f(x) = 0 pour x = 1 et f(x) > 0 pour x > 1.

5. (a) function y=f(x)if x=0 then y=-1else $y=\log(x)/(x-\log(x))$ end

endfunction

x=0:0.1:10 fplot2d(0:0.1:10,f)

(b) L'instruction x=0:0.1:10 renvoit un vecteur ligne x contenant la liste des réels de 0 à 10 avec un pas de 0, 1. C'est-à-dire: $x = \begin{pmatrix} 0 & 0, 1 & 0, 2 & 0, 3 & \dots & 10 \end{pmatrix}$. On remarque que ce vecteur contient 101 coefficients.

Ainsi, si on voulait crée ce vecteur avec la commande linspace, il aurait fallu taper :

car la commande linspace(a,b,n) crée un vecteur ligne contenant n nombre régulièrement espacées dans l'intervalle [a,b].

(c)

(d) Ces instructions tracent la représentation graphique de la suite d_k définie par $d_k = f(1/k)$. Or on sait d'après la question 2.(a) que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. En posant $x = 1/k \to 0$ on a bien $\lim_{k \to +\infty} f(1/k) = f(0) = -1$ par continuité de f.

Exercice 4.: edhec 2004

1. (a) On étudie la limite par opérations élémentaires :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\quad \text{ donc }\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{-n}{x}=-\infty$$

puis en composant par l'exponentielle,

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0 \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

donc par produit,

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

donc f_n est continue à droite en 0.

(b) On étudie le taux d'accroissement pour x > 0:

$$T_0(x) = \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-\frac{n}{x}}}{x} = e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

(vu à la question précédente) donc f_n est dérivable à droite en 0, et $(f_n)'_d(0) = 0$.

2. (a) La fonction $x \to -\frac{n}{x}$ est dérivable sur] $-\infty$; 0[et]0; $+\infty$ [et exp est dérivable sur $\mathbb R$ donc par composition, $x \to e^{-\frac{n}{x}}$ est dérivable sur] $-\infty$; 0[et]0; $+\infty$ [.

De plus la fonction $x \to x$ est dérivable sur \mathbb{R} , donc par produit f_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

On a de plus pour tout $x \neq 0$,

$$f'_n(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x \times \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \left(1 + \frac{n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}} = \frac{x+n}{x} e^{-\frac{n}{x}}.$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	 ∞		-n		0		$+\infty$
$e^{-\frac{n}{x}}$		+		+		+	
x+n		_	0	+		+	
x		_		_	0	+	
$f'_n(x)$		+	0	_		+	

(b) En $+\infty$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

En $-\infty$, on a

$$\lim_{x\to -\infty} -\frac{n}{x} = 0$$

donc par composition par l'exponentielle continue,

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{n}{x}} = e^0 = 1 \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty.$$

En 0^- , on pose $X=-\frac{1}{x}\to +\infty$, et on obtient par croissances comparées que

$$\lim_{x \to 0^-} f_n(x) = \lim_{X \to +\infty} -\frac{e^{nX}}{X} = -\infty$$

enfin en 0^+ on a vu que f_n continue à droite en 0 donc

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0.$$

On obtient alors:

x	$-\infty$	-n	0) +∞
$f'_n(x)$		+ 0 -		+
$f_n(x)$	_	$-ne$ ∞	$-\infty$ (+∞

3. (a) Le cours donne immédiatement :

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^{2}}{2} + o(u^{2}).$$

(b) On pose alors $u=-\frac{n}{x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$ donc on peut appliquer le DL précédent :

$$e^{-\frac{n}{x}} = 1 + \left(-\frac{n}{x}\right) + \frac{\left(-\frac{n}{x}\right)^2}{2} + o\left[\left(-\frac{n}{x}\right)^2\right] = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

puis on multiplie par x:

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(c) On en déduit que :

$$f_n(x) - (x - n) = \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to \pm \infty]{} 0$$

donc la droite d'équation y = x - n est asymptote à C_n en $-\infty$ et $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$ on a

$$f_n(x) - (x - n) \sim \frac{n^2}{2x} < 0$$

donc C_n se trouve en dessous de son asymptote.

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$f_n(x) - (x - n) \sim \frac{n^2}{2x} > 0$$

donc C_n se trouve au-dessus de son asymptote.

- (d) On rassemble toutes les informations précédentes : asymptote en $\pm \infty$, variations correctes, limites en 0^- et 0^+ , maximum local atteint en -1 et de valeur $-e \simeq -2, 7$.
- 4. (a) D'après ses variations, f_n admet un maximum sur $]-\infty;0[$ qui est strictement négatif donc f_n est strictement négative sur $]-\infty;0[$ et il n'y a pas de solution sur $]-\infty;0[$.

De plus f_n est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ donc réalise une bijection de \mathbb{R}^+ dans $[f(0); \lim_{t\to\infty} f[=[0; +\infty[=\mathbb{R}^+]$.

Or $1 \in \mathbb{R}^+$ donc il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

Il y a donc une unique solution sur \mathbb{R} , et elle est positive (strictement car $f_n(0) = 0 \neq 1$).

(b) Comme u_n est implicite, on compare $f_n(u_n)$ et $f_n(1)$: on calcule

$$f_n(1) = 1 \times e^{-n} = e^{-n} < e^0 = 1$$

car - n < 0 et exp est strictement croissante.

On en déduit que $f_n(1) < f_n(u_n)$ et par stricte croissance de f_n sur \mathbb{R}^+ ,

$$1 < u_n$$
.

On veut ensuite prouver que $u_n \ln(u_n) = n$, et pour prouver une égalité sur une quantité implicite, on revient à sa définition en explicitant la fonction :

$$f_n(u_n) = 1$$
 donc $u_n \times e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$.

On transforme alors : on compose par ln (les deux quantités valent 1 donc sont bien strictement positives) et on obtient :

$$\ln(u_n) - \frac{n}{u_n} = 0$$
 donc $u_n \ln(u_n) - n = 0$ et enfin $u_n \ln(u_n) = n$.

donc u_n est bien solution de l'équation $x \ln(x) = n$.

(c) g est de classe C^{∞} sur $[1; +\infty[$ comme produit de fonctions de classe C^{∞} et

$$g'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0$$
 sur $[1; +\infty[$.

On en déduit que g est continue et strictement croissante sur cet intervalle donc réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers son image $[g(1); \lim g[$.

Avec

$$g(1) = 0$$
 et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

comme produit de limites valant $+\infty$, on obtient que g est une bijection de $[1; +\infty[$ dans \mathbb{R}^+ .

comme $1 \in \mathbb{R}^+$, l'équation g(x) = n admet bien une solution, et celle-ci est unique donc c'est forcément u_n .

De plus on a

$$g(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = g^{-1}(n)$$

 $g(u_n)=n\Leftrightarrow u_n=g^{-1}(n)$ Comme $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ on obtient $\lim_{x\to+\infty}g^{-1}(x)=+\infty$, et on en déduit que

$$\lim u_n = \lim_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(d) On a obtenu précédemment que

$$u_n \ln(u_n) = n.$$

On compose par ln (les deux termes valent n donc sont strictement positifs) et comme $u_n > 1$, $ln(u_n) > 0$ et $ln(ln u_n)$ existe bien donc :

$$\ln(u_n \ln u_n) = \ln n$$
 puis $\ln(u_n) + \ln(\ln u_n) = \ln n$.

On factorise la somme par son terme prépondérant $ln(u_n)$:

$$\ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right) = \ln(n)$$

Enfin en posant $X = \ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ on obtient par croissances comparées que :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln u_n} = 1 + \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 1 + 0 = 1$$

ce qui donne bien :

$$\ln u_n \sim \ln n$$

Attention, on ne peut pas composer l'équivalent par exp!!!!

On utilise à nouveau $u_n \ln(u_n) = n$, qui donne

$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}.$$

5. (a) On a $u_n = g^{-1}(n)$; or la fonction g est strictement croissante donc g^{-1} aussi, ce qui donne

$$u_{n+1} = g^{-1}(n+1) > g^{-1}(n) = u_n$$

pour tout n, donc (u_n) est strictement croissante.

(b) On calcule cette quantité et on fait apparaître $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ pour simplifier :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{(n+1)-1}{u_{n+1}}} = u_{n+1}e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}}e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 \times e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

- 6. On pose $I_n = \int_{t}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$.
 - (a) Pour encadrer une intégrale on regarde l'ordre des bornes puis on travaille sur l'intérieur :

Par croissance stricte de la suite u_n , on sait que $u_n < u_{n+1}$ donc les bornes de I_n sont rangées dans l'ordre croissant.

Pour tout $t \in [u_n; u_{n+1}]$ par croissance de f_n sur \mathbb{R}^+ on obtient :

$$f_n(u_n) \le f_n(t) \le f_n(u_{n+1})$$
 donc $1 \le f_n(t) \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$

En intégrant l'encadrement avec les bornes dans l'ordre croissant on obtient

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} dt \le I_n \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} dt$$

puis en calculant les intégrales de gauche et de droite :

$$u_{n+1} - u_n \le I_n \le (u_{n+1} - u_n)e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$
.

On divise enfin l'encadrement par $u_{n+1} - u_n > 0$:

$$1 \le \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \le e^{\frac{1}{u_{n+1}}}.$$

(b) On sait que $\lim u_{n+1} = +\infty$ donc par quotient puis en composant par l'exponentielle continue on obtient :

$$\lim \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$
 puis $\lim e^{\frac{1}{u_{n+1}}} = e^0 = 1$.

Le théorème d'encadrement donne alors

$$\lim \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1 \quad \text{donc} \quad I_n \sim (u_{n+1} - u_n).$$

(c) I_n et $(u_{n+1}-u_n)$ sont positives et équivalentes en $+\infty$, donc le théorème de comparaison permet de dire que les séries $\sum_{n\geq 1} I_n$ et $\sum_{n\geq 1} (u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.

Étudions cette dernière à l'aide de sa somme partielle : par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{p} (u_{n+1} - u_n) = u_{p+1} - u_1 \xrightarrow[p \to +\infty]{} + \infty$$

donc les deux séries divergent.

En particulier on obtient bien que la série de terme général I_n est divergente.