# Devoir maison $n^{\text{o}}$ 5

A rendre le Mardi 19 Novembre 2019

**Exercice 1.** : **Etude d'une suite récurrente à l'aide de l'étude de la fonction $f$**
On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in ]0;+\infty[ \end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de $f$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe.
2. Écrire un programme en Scilab qui, pour une valeur $N$ fournie par l'utilisateur, calcule et affiche $u_N$.
3. Montrer que $f$ est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Établir que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
5. Prouver que $f$ est dérivable en 0 et déterminer la valeur de $f'(0)$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$
puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque $x$ tend vers 0.
7. Prouver très rigoureusement que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
8. Établir que :
$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$
En déduire que :
$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0$$
9. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n$$
10. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite $L$.

**Exercice 2.** : **Espace vectoriel**
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A\,M = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2M = AM\right\} \end{aligned}$$

*Remarque : **ATTENTION !** , dans cet exercice, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ ne sont pas des sous-espaces propres de $A$, malgré les notations qui le laissent croire (notations mal choisies).*
*Vous serez donc obligés d'introduire d'autres notations que celles du cours si vous êtes amenés à calculer des sous-espaces propres dans cet exercice, pour ne pas faire la confusion avec les notations de l'exercice.*

**Partie I**

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que, si $A$ est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. (a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.
   (b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

**Partie II**

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $C$.
2. Déterminer les sous-espaces propres de $C$. On donnera une base et la dimension de chaque espace.
   *Remarque : comme indiqué en début d'exercice, on notera $F_\lambda(C)$ et non $E_\lambda(C)$ le sous-espace propre de $C$ associé à la valeur propre $\lambda$ pour éviter toute confusion avec les notations de l'énoncé.*
3. Déterminer une matrice $P$ inversible, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et une matrice $D$ diagonale de coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant telles que $C = PDP^{-1}$.
4. **Informatique :** On admet que si $C$ est diagonalisable, l'instruction `[P,D]=spec(C)` renvoit une matrice $P$ et une matrice $D$ telles que $C = PDP^{-1}$. On exécute le programme suivant :

```
C=[3,-2,-1;1,0,-1;2,-2,0]
[P,D]=spec(C)
disp(D,"D=")
disp(P,"P=")
```

   On obtient :

```
D=

  - 8.882D-16    0     0
    0            2.    0
    0            0     1.

 P=


         column 1 to 2

  - 0.5773503  - 0.7071068
  - 0.5773503    7.051D-16
  - 0.5773503  - 0.7071068

         column 3

  - 0.7071068
  - 0.7071068
  - 5.551D-16
```

   Expliquer en quoi ces résultats sont cohérents avec vos calculs.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
   Montrer : $M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.
6. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels $a$, $b$, $c$ tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
7. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
8. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$ ?

**Exercice 3.** : **Etude d'une suite implicite**
On désigne par $n$ un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) \ : \ \ln(x) + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln(x) + x$$

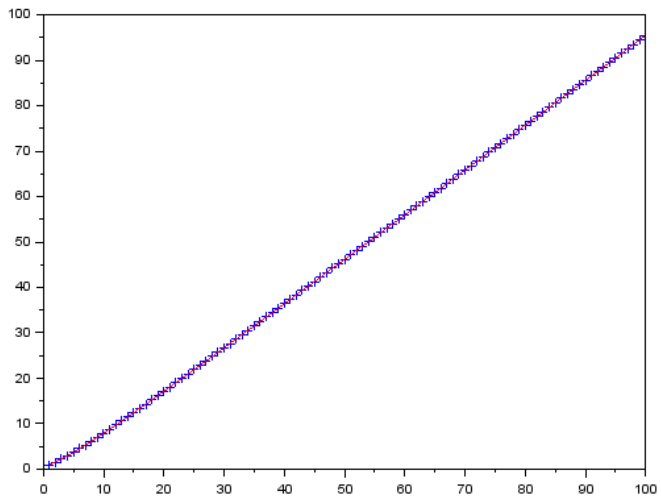
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n)$ admet une et une seule solution $x_n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)$ est croissante.
3. Montrer que $\forall x > 0$, $\ln(x) < x$.
4. Prouver que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$$
5. Quelle est la limite de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
6. Montrer que $\frac{\ln(x_n)}{n}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. En déduire que :
$$x_n \sim n$$
7. Calculer la limite de $x_{n+1} - x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
8. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n - x_n}{\ln(n)}$
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$
   (b) Quelle est la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
   (c) Prouver alors que
   $$1 - u_n \sim \frac{1}{n}$$
9. En déduire que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
10. **Informatique :** Compléter le programme suivant qui, pour tout $n \in [\![1, 100]\!]$, détermine une valeur approchée à $10^{-6}$ près de $x_n$ (i.e. de la solution de l'équation $f(x) = n$) par méthode de dichotomie (se faire un dessin si besoin pour illustrer la méthode) :

```
x=zeros(1,100)
for n=1:100 do
    a=n/2
    b=n
    while abs(b-a) >10^{-6} do
        m=(a+b)/2
        if f(m)<n then
            **********
        else
            ***********
        end
    end
    x(n)=(a+b)/2
end

plot(x,'+')

n=1:100
plot2d(n,n-log(n)+log(n)./n,style=5)
```

Après exécution, on obtient le graphique suivant :




Commenter les deux représentations graphiques obtenues.

**Exercice 4.**

## Partie 1

On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1$.

## Partie 2

On considère une suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2. (a) Pour tout entier $k$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de $u_k^2$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geqslant 2n + 1$. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.
   (b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 : $u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
   (c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.