Devoir maison n° 6

A rendre le Mardi 3 Décembre 2019

Exercice 1.
Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

I. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :
$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$
4. On considère les matrices :
$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$
où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que :
   $$M(a) = P + \alpha Q$$
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q.
   (d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.
5. **Informatique :**
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui prend en entrée le réel a et renvoit en sortie la matrice $M(a)$, en effectuant uniquement des combinaisons linéaires des matrices `ones(3,3)`, `eye(3,3)` et des matrices intermédiaires définies au cours du programme :
   ```
   function M=mat(a)
       P= **************
       Q=**************
       M=**************
   endfunction
   ```
   (b) Quelle instruction doit-on alors taper dans la console Scilab pour que Scilab affiche la matrice $M(2)$?

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]\, 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\,\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :
$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$
   (a) Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1.

(b) Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :
   — le premier jour le titre est stable ;
   — si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
   — si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
   — si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

   On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l' évènement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n.

   (a) Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n.

   (b) En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.

   (c) Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

3. **Informatique :** On rappelle que l'instruction `grand(n,'markov',A',x0)` simule les n premiers états (sans compter l'état initial) d'une chaine de Markov de matrice de transition A et partant de l'état initial numéro $x0$.
   Plus précisément, elle renvoit des numéros d'états c'est-à-dire que si l'instruction `grand(4, 'markov', A',3)` renvoit `1. 3. 3. 2.` , celà signifie qu'à l'instant 1, la chaine est dans le premier état, qu'aux instants 2 et 3 est est dans le troisième état et qu'à l'instant 4 elle est dans le deuxième état.

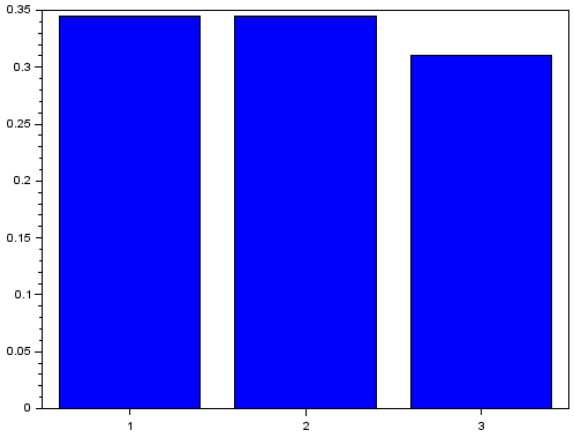
   (a) Compléter l'instruction `X=grand()` ci-dessous, en choisissant la bonne matrice de transition (on fera appelle à la fonction `mat`) et le bon état initial, de manière ce qu'elle simule les 100 premiers états de la chaîne de Markov présentée à la question II.2 et les mémorise dans le vecteur ligne X.

```
function M=mat(a)
    P= 1/3*ones(3,3)
    Q=eye(3,3)-P
    M=P+(1-3*a)*Q
endfunction

S=zeros(1,3)
for k=1:1000 do
    X=grand(100,'markov',***********',**********)
    S(X(100))=S(X(100))+1
end
f=S/1000
bar(1:3,f)
```

   (b) Expliquer ce que fait le programme et préciser ce que contiendront les coefficients du vecteur ligne `S` une fois le programme exécuté.

   (c) Une fois exécuté, le programme affiche le diagramme en bâton suivant :



Expliquer en quoi le diagramme est cohérent avec l'étude mathématique de cette chaîne de Markov.

Exercice 2.

Rappels :

• Soit M une matrice. La transposée de M, notée ${}^tM$ est la matrice obtenue à partir de M en échangeant les lignes et les colonnes :

Exemple : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

• Une matrice carrée M est dite symétrique si ${}^tM = M$. Par exemple, la matrice M de l'exemple précédent n'est pas symétrique !

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}_n = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tM = M \right\}$$

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

— On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

— On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

— On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{B} = (F, G, H)$ est une base de $\mathcal{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2$.
2. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$
   (a) Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2, \quad u(S) \in \mathcal{S}_2$.
   (b) Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2$.
   (c) Calculer les produits AFA, AGA, AHA.
   (d) Donner la matrice M de u dans la base (F, G, H) de $\mathcal{S}_2$.

Partie II : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

1. On définit les matrices $B = 4F + 3G - 4H$, $C = 4F - 2G + H$ et $E = F + 2G + 4H$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (B, C, E)$ est une base de $\mathcal{S}_2$. Exprimer $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
2. Déterminer la matrice D de l'application u dans la base $\mathcal{B}'$ et justifier la relation $M = PDP^{-1}$.
3. **Informatique :** On exécute les instructions suivantes :

```
M=[0 0 4;0 4 6;4 12 9]
[P,D]=spec(M)
disp(D,"D=")
disp(P, "P=")
```

   On obtient :

```
D=

   16.    0     0
   0      1.    0
   0      0   - 4.

P=


         column 1 to 2

 - 0.2182179  - 0.8728716
 - 0.4364358    0.4364358
 - 0.8728716  - 0.2182179

         column 3

 - 0.6246950
 - 0.4685213
   0.6246950
```

Justifier la cohérence des matrices obtenues.

4. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.
5. En déduire : $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$.
6. Établir : $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, où e désigne l'application identité de $\mathcal{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Exercice 3.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice A de f relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
3. (a) Etablir que f est un automorphisme de E. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Ecrire la matrice de f^{-1} relativement à la base (e_0, e_1, e_2).
4. (a) Déterminer la seule valeur propre λ de A. Préciser le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
   (b) On admet que les valeurs propres de f sont les valeurs propres de sa matrice A et que les vecteurs propres de f sont les vecteurs dont la matrice dans la base (e_0, e_1, e_2) est un vecteur propre de A.
   En déduire les valeurs propres de f et ses sous-espaces propres.

Partie 2

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F.
On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

1. Montrer que g est un endomorphisme de F.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer $\ker(g - 6Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\ker(g - 6Id)$.
   (a) Montrer que la fonction j, définie par tout réel x par $j(x) = u'(x)\, e^{-5x}$ est constante.
   (b) En déduire que $\ker(g - 6Id) = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.

   On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\ker(g)$. On considère donc u une fonction de $\ker(g)$.
3. On pose $v = u' - 2u$.
   (a) Montrer que $v' = 3v$.
   (b) En déduire que la fonction h, définie pour tout réel x par $h(x) = v(x)e^{-3x}$, est constante.
   (c) Conclure qu'il existe un réel α tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x) = \alpha e^{3x}$.
4. On pose $w = u' - 3u$.
   (a) Montrer que $w' = 2w$.
   (b) En déduire que la fonction k, définie pour tout réel x par $k(x) = w(x)e^{-2x}$, est constante.
   (c) Conclure qu'il existe un réel β tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad w(x) = \beta e^{2x}$.
5. (a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que $\ker(g) = \text{Vect}(u_3, u_4)$, où les fonctions u_3 et u_4 sont définies pour tout réel x par $u_3(x) = e^{3x}$ et $u_4(x) = e^{2x}$.
   (b) Montrer enfin que $\dim(\text{Ker}(g))=2$.