Indications du devoir maison n° 6

Exercice 1.

I. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

1. Pour montrer une égalité, on part du côté pour lequel il y a un calcul à faire, pour aller au plus simple. Ici, il suffit de calculer le produit $M(a)M(b)$.
2. Il y a une astuce ici qui consiste à utiliser la question précédente (astuce à retenir, c'est toujours la même pour ce type de question) : Remarquez d'abord que $M(0) = I$.
   On va donc utiliser la question précédente, en vérifiant s'il n'y a pas une matrice de la forme $M(b)$ telle que $M(a)M(b) = I$.
   On résout donc l'équation $M(a)M(b) = M(0) \Leftrightarrow M(a + b - 3ab) = M(0) \Leftrightarrow a + b - 3ab = 0$, d'inconnue b.

   Vous trouverez alors l'inverse de $M(a)$, qui sera sous la même forme $M(b)$ pour tout $a \neq 1/3$.
   Il restera alors à étudier le cas particulier $a = 1/3$ en explicitant la matrice $M(1/3)$: elle sera clairement non inversible.
3. Utiliser la question 1 qui vous permet de calculer $M(a_0)^2$.
4. (a) - On résout cette équation d'inconnue α. Un équation matricielle se traduit en système linéaire.
   - Attention, α doit satisfaire à toutes les équations, pas une seule !

   (b) Produits matriciels sans difficulté.

   (c) - Méthode : on prouve par récurrence que $M(a)^n = a_nP + b_nQ$, et on obtient au passage une relation de récurrence sur les coefficients a_n et b_n.

   (d) - On cherche donc a_n et b_n, suites récurrentes imbriquées.

   - On "désimbrique" les suites en obtenant une relation de récurrence double pour l'une des deux.

   - Les suites récurrentes doubles s'étudient en résolvant l'équation caractéristique pour obtenir la forme du terme général.

   - On obtient les deux constantes en utilisant la valeur connue de deux des termes de la suite pour résoudre un système.

   - La deuxième suite s'obtient soit en fonction de l'autre avec l'une des relations de récurrence, soit en reprenant la même étude que pour la première.
5.

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

1. (a) Question classique utilisée dans l'étude des chaînes de Markov (cf tp 4) : poser une suite vectorielle $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ et montrer que le système précédent s'écrit sous forme matriciel de la forme $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice à déterminer. Puis on obtient X_n en fonction de A et X_1 (ne pas parler de suite géométrique sur des vecteurs mais on s'inspire des suites géométriques pour donner X_n en fonction de X_1 !)

(b) Ne pas oublier de justifier que $|q| < 1$ pour la limite d'une suite géométrique.

2. (a) On reconnaît une chaîne de Markov :
- pour obtenir les probabilités de l'état à l'instant $n+1$ en fonction de celui à l'instant n, on utilise les probabilités totales avec le système complet d'évènement de l'instant n.

(b) On retrouve la forme de la question 1). Plutôt que de refaire la même chose, penser à utiliser directement les résultats de la partie 1. avec une valeur particulière de a bien choisie.

(c) Même remarque qu'au 1)b).

3.

Exercice 2.
Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

1. – Pour montrer que c'est un espace vectoriel, il faut se demander s'il est sous la forme implicite ou explicite. S'il est sous la forme implicite, on utilise la caractérisation des sev, s'il est sous forme explicite, on l'écrit sous la forme Vect.

   – Pour la dimension, il faut une base. Pour une base, il faut une famille génératrice et libre, ou libre avec le bon nombre de vecteurs (mais ce bon nombre est la dimension, qui est inconnue).

   – Pour trouver une famille génératrice, on explicite la forme générale des matrices de l'espace puis on écrit cet espace sous la forme Vect(...).

   – On teste ensuite la liberté de la famille génératrice obtenue : soit avec un des cas particuliers (un ou deux vecteurs) soir en revenant à la définition : résolution d'une équation.

2. (a) on prend un S quelconque de $\mathcal{S}_2$, ce que la question précédente permet de faire. On calcule ensuite $u(S)$ et on vérifie s'il est dans $\mathcal{S}_2$.

   (b) Pas de difficulté si la définition d'un endomorphisme est connue. Attention à bien prouver deux propriétés distinctes !

   (c) trivial

   (d) Pas de difficulté si la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base est connue. Si la décomposition sur la base n'est pas évidente, on résout un système pour l'obtenir.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

1. Pour une base, il faut une famille génératrice et libre, ou libre avec le bon nombre de vecteurs si la dimension de l'espace vectoriel dont elle doit être une base est connue.

2. • Idem question 2. (d) mais dans une autre base. Pas de difficulté si la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base est connue.

   • M et D sont deux matrices d'une même application linéaire u (dans des base différentes) dont c'est la formule de changement de base qui donne la relation entre ces matrices.

3.
4. Trivial.

5. – On vient de diagonaliser M, il faut penser à l'utiliser !

   – M et D sont semblables, ce qui est vrai sur D est vrai sur M (mais il faut savoir le prouver).

   – Il faut donc commencer par prouver la même relation sur D.

6. – Quel est le lien entre u et M ?

   – Plus généralement, quand on veut prouver quelque chose sur une application linéaire et qu'on dispose d'une matrice de cette application, on le prouve sur la matrice pour l'obtenir sur l'application.

   – Reste à rédiger correctement l'obtention de la relation sur u : invoquer le théorème du cours : si deux applications linéaires ont même matrice dans une même base alors elles sont égales.

Exercice 3.

Partie 1

1. Question très classique : ne pas oublier de prouver deux propriétés totalement différentes, pour la première on fait attention de conclure sur les fonctions et pas sur les expressions pour tout x et pour la deuxième il y a deux méthodes possibles : par les degrés (plus rapide mais plus difficile et ne marche pas toujours) ou par l'expression explicite de $f(P)(x)$ pour tout x.

2. Très classique également : attention de nouveau à conclure sur les fonctions et pas sur les expressions en fonction de x pour le calcul des images.

3. (a) Pour prouver une propriété sur un endomorphisme, toujours penser à la prouver sur une matrice associée (toujours prendre la plus simple s'il y en a plusieurs) en traduisant éventuellement si la propriété change de nom... Par contre on prendra garde à bien conclure sur l'endomorphisme après l'obtention de la propriété sur la matrice.

   (b) A nouveau, la matrice de f^{-1} s'obtient à l'aide de la matrice de f.

4. (a) Méthodes habituelles.

   (b) L'unique valeur propre de f est la valeur propre de sa matrice.
   Pour le sous-espace propre de f, on récrit le sous-espace propre de A mais en remplaçant les matrices colonnes par les polynômes dont ses matrices colonnes sont les coordonnées dans la base (e_0, e_1, e_2).

Exercice supplémentaire

Partie 2

1. Deux propriétés à prouver. Pour prouver qu'une fonction est de classe C^∞, on utilise obligatoirement les opérations élémentaires.

2. (a) – Pour montrer qu'une fonction est constante, on montrer que sa dérivée est nulle. Au passage, on n'oubliera pas de justifier la dérivabilité avant de dériver.

   – Il faudra bien sûr utiliser l'hypothèse $u \in Ker(g - 6Id)$ et la traduire en terme d'équation vérifiée par u.

   (b) – Pour montrer une égalité de deux ensembles, on prouve deux inclusions.

   – Pour montrer une inclusion d'un Vect(.....) dans un autre espace vectoriel, il suffit de prouver que tous les éléments de la base (ou de la famille génératrice) sont dans le grand espace. Après on invoque la stabilité de $Ker(g - Id)$ par combinaisons linéaires.

   – La méthode plus générale pour prouver une inclusion consiste à prendre un élément quelconque du plus petit, et à prouver qu'il est aussi dans le plus grand (il faudra donc le faire dans les deux sens !)

- La question 2a commence par se donner $u \in \text{Ker}(....)$, c'est donc le début de la preuve d'une des inclusions.

- Enfin on connaît j, on peut donc en déduire u', puis u.

3. (a) Calculer v' et utiliser la définition de u.

   (b) Similaire à la question 2a.

   (c) On connaît h, on peut donc en déduire v.

4. (a) Voir 3a.

   (b) Voir 3b.

   (c) Voir 3c.

5. (a) la méthode est similaire à la question 2b, avec un difficulté supplémentaire : les questions 3 et 4 servent à prouver l'une des inclusions, mais on a trouvé v et w mais pas u : il faut penser à exprimer u en fonction de v et w pour le déterminer.

   (b) Il faut donc une base, donc une famille génératrice **et libre !** On utilise alors l'un des deux cas particuliers (un ou deux vecteurs), ou bien la définition : résolution d'une équation. Enfin on ne peut pas "identifier" avec des équations sur un espace de fonctions quelconques (autres que l'espace des polynômes) car on ne connaît pas de base de cet espace ; l'astuce est alors de comprendre qu'on a à notre disposition autant d'équations que de valeurs de x, et d'en prendre quelques-unes très simples pour avoir un système soluble.