Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1. : **ecricome 2001**

I. Puissances successives de $M(a)$.

1. On effectue le produit de matrices et on obtient :

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha = (1-2a)\times(1-2b) + ab + ab = 1 - 2a - 2b + 6ab = 1 - 2(a+b-3ab)$$
$$\beta = (1-2a)\times b + a\times(1-2b) + ab = b - 2ab + a - 2ab + ab = a + b - 3ab$$

et on en déduit bien que :

$$M(a)M(b) = M(a+b-3ab).$$

2. On remarque que $I = M(0)$ et on va chercher l'inverse de $M(a)$ sous la forme $M(b)$, et pour cela on va chercher la bonne valeur de b en résolvant :

$$a + b - 3ab = 0 \Longleftrightarrow b(1-3a) = -a \Longleftrightarrow b = \frac{-a}{1-3a} = \frac{a}{3a-1} \quad \text{si} \quad 1 - 3a \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq \frac{1}{3}.$$

On en déduit que pour $a \neq \frac{1}{3}$,

$$M(a)M\left(\frac{a}{3a-1}\right) = M(0) = I$$

donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$.
De plus si $a = \frac{1}{3}$ on a

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible car toutes ses colonnes (ou ses lignes) sont égales.

On en déduit que $M(a)$ est inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{3}$, et dans ce cas

$$[M(a)]^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right).$$

3. La première question donne :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0 + a_0 - 3a_0^2)$$

donc les 9 équations données par l'équation matricielle donneront toutes l'équation suivante :

$$M(a_0^2) = M(a_0) \Longleftrightarrow -3a_0^2 + 2a_0 = a_0 \Longleftrightarrow a_0(-3a_0+1) = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 3a_0 = 1 \Longleftrightarrow a_0 = \frac{1}{3}$$

Or on impose $a_0 \neq 0$ ce qui donne :

$$a_0 = \frac{1}{3}.$$

4. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

(a) On résout le système de 9 équations qui donnera 2 équations (les autres sont identiques) :

$$P+\alpha Q = M(a) \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} 1+2\alpha = 3-6a \\ 1-\alpha = 3a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \alpha = 1-3a \\ \alpha = 1-3a \end{array} \right.$$

et on obtient $\alpha = 1-3a$ donc :

$$M(a) = P+\alpha Q = M(a) = P+(1-3a)Q.$$

(b) $P = M(a_0)$ est solution par définition de l'équation $M(a_0)^2 = M(a_0)$ donc :

$$P^2 = P$$

puis

$$QP = (I-P)P = P-P^2 = P-P = 0$$
$$PQ = P(I-P) = P-P^2 = P-P = 0$$

et enfin

$$Q^2 = (I-P)(I-P) = I-P-P+P^2 = I-2P+P = I-P = Q.$$

Remarque : si on développe $Q^2 = (I-P)^2$ avec une identité remarquable, il faut justifier précédemment que les matrices P et Q commutent (car les identités remarquables sont des cas particuliers de la formule du binôme de Newton).

(c) Première méthode : Récurrence.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe u_n et v_n tels que :

$$[M(a)]^n = u_n P + v_n Q$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$M(a)^1 = M(a) = P+\alpha Q = u_n P + v_n Q \quad \text{avec} \quad u_1 = 1 \quad \text{et } v_1 = \alpha.$$

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $[M(a)]^n = u_n P + v_n Q$, on a alors

$$[M(a)]^{n+1} = (u_n P + v_n Q)(P+\alpha Q) = u_n P^2 + u_n \alpha PQ + v_n QP + v_n \alpha Q^2 = u_n P + v_n \alpha Q = u_{n+1}P + v_{n+1}Q$$

avec

$$u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \alpha v_n.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[M(a)]^n = u_n P + v_n Q.$$

Deuxième méthode : Avec la formule du binôme de Newton.

Les matrices P et Q commutent car $PQ = QP = 0$, et avec $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$ une récurrence immédiate donne :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P^n = P \quad \text{et} \quad Q^n = Q$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient pour tout $n \geqslant 1$:

$$M(a)^n = (P+\alpha Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k Q^k P^{n-k}$$

qui donne d'une part :

$$M(a)^1 = P+\alpha Q$$

et pour tout $n \geqslant 2$,

$$M(a)^n = P^n + PQ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k Q^{k-1} P^{n-k-1} + \alpha^n Q^n = P + 0 + \alpha^n Q$$

et dans tous les cas, $M(a)^n$ est bien combinaison linéaire de P et Q.

(d) Première méthode :

On a obtenu précédemment que
$$M(a)^n = u_n P + v_n Q$$
avec des suites (u_n) et (v_n) qui vérifient :
$$u_1 = 1, \quad v_1 = \alpha \quad \text{et pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n \quad \text{et } v_{n+1} = \alpha v_n$$
donc les deux suites sont géométriques et on obtient pour tout $n \geqslant 1$:
$$u_n = 1^{n-1} u_1 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad v_n = \alpha^{n-1} v_1 = \alpha^n$$
et on obtient finalement :
$$M(a)^n = P + \alpha^n Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode :
On remarque que la formule obtenue pour $n \geqslant 2$ est encore valable pour $n = 1$, donc pour tout $n \geqslant 1$,
$$M(a)^n = P + \alpha^n Q$$
qu'on explicite comme ci-dessus.

5. **Informatique :**

(a) Recopier et compléter la fonction suivante, qui prend en entrée le réel a et renvoit en sortie la matrice $M(a)$, en effectuant uniquement des combinaisons linéaires des matrices `ones(3,3)`, `eye(3,3)` et des matrices intermédiaires définies au cours du programme :

```
function M=mat(a)
    P= 1/3*ones(3,3)
    Q=eye(3,3)-P
    M=P+(1-3*a)*Q
endfunction
```

(b) `--> mat(2)`

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

1. (a) On remarque qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a :
$$X_{n+1} = M(a) X_n$$
donc une récurrence classique donne
$$X_n = M(a)^{n-1} X_1 = \left[P + (1-3a)^{n-1} Q \right] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} p_1+q_1+r_1 \\ p_1+q_1+r_1 \\ p_1+q_1+r_1 \end{pmatrix} + (1-3a)^{n-1} \begin{pmatrix} 2p_1-q_1-r_1 \\ -p_1+2q_1-r_1 \\ -p_1-q_1+2r_1 \end{pmatrix} \right].$$
On en déduit en effectuant le produit matriciel que
$$p_n = \frac{1}{3}\left(\left[1 + 2(1-3a)^{n-1} \right] p_1 + \left[1 - (1-3a) \right]^{n-1} (q_1 + r_1) \right).$$
et de même :
$$q_n = \frac{1}{3}\left(\left[1 + 2(1-3a)^{n-1} \right] q_1 + \left[1 - (1-3a) \right]^{n-1} (p_1 + r_1) \right).$$
$$r_n = \frac{1}{3}\left(\left[1 + 2(1-3a)^{n-1} \right] r_1 + \left[1 - (1-3a) \right]^{n-1} (p_1 + q_1) \right).$$

(b) $a \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$ donc :

$$0 < a < 2/3 \quad \text{donc} \quad 0 < 3a < 2 \quad \text{donc} \quad -2 < -3a < 0 \quad \text{et enfin} \quad -1 < 1-3a < 1$$

donc $1-3a \in]-1;1[$ donne

$$(1-3a)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis on en déduit par opérations élémentaires sur les limites que p_n, q_n et r_n admettent pour même limite :

$$\ell = \frac{p_1+q_1+r_1}{3}.$$

2. (a) La formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (M_n, S_n, B_n) donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M_{n+1}) &= \mathrm{P}_{M_n}(M_{n+1})\,\mathrm{P}(M_n) + \mathrm{P}_{S_n}(M_{n+1})\,\mathrm{P}(S_n) + \mathrm{P}_{B_n}(M_{n+1})\,\mathrm{P}(B_n) \\ &= \frac{2}{3}\,\mathrm{P}(M_n) + \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(S_n) + \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(B_n). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(S_{n+1}) &= \mathrm{P}_{M_n}(S_{n+1})\,\mathrm{P}(M_n) + \mathrm{P}_{S_n}(S_{n+1})\,\mathrm{P}(S_n) + \mathrm{P}_{B_n}(S_{n+1})\,\mathrm{P}(B_n) \\ &= \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(M_n) + \frac{2}{3}\,\mathrm{P}(S_n) + \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(B_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B_{n+1}) &= \mathrm{P}_{M_n}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(M_n) + \mathrm{P}_{S_n}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(S_n) + \mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(B_n) \\ &= \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(M_n) + \frac{1}{6}\,\mathrm{P}(S_n) + \frac{2}{3}\,\mathrm{P}(B_n). \end{aligned}$$

(b) On remarque qu'en posant

$$a = \frac{1}{6} \in \left]0; \frac{2}{3}\right[\quad , \quad p_n = \mathrm{P}(M_n) \quad , \quad q_n = \mathrm{P}(S_n) \quad \text{et} \quad r_n = \mathrm{P}(B_n)$$

on retrouve les hypothèses de la question 1, dont on va appliquer le résultat :

$$\mathrm{P}(M_n) = p_n = \frac{1}{3}\left(\left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \times 0 + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \times 1\right) = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

car l'énoncé donne (le premier jour le titre est stable) :

$$p_1 = 0 \quad , \quad q_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_1 = 0$$

et avec des calculs identiques :

$$\mathrm{P}(M_n) = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \quad , \quad \mathrm{P}(S_n) = q_n = \frac{1}{3}\left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(B_n) = r_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

(c) La question 1) montre que les trois suites ont la même limite

$$\ell = \frac{p_1+q_1+r_1}{3} = \frac{1}{3}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

3. **Informatique :**

(a) D'après la question 2., on sait que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est $M\left(\frac{1}{6}\right)$. De plus, l'énoncé indique que l'état initial est "le titre est stable" c'est-à-dire l'état numéro 2. D'où :

```
function M=mat(a)
    P= 1/3*ones(3,3)
    Q=eye(3,3)-P
    M=P+(1-3*a)*Q
endfunction

S=zeros(1,3)
for k=1:1000 do
    X=grand(100,'markov',mat(1/6)',2)
    S(X(100))=S(X(100))+1
end
f=S/1000
bar(1:3,f)
```

(b) On remarque que le programme répète 1000 fois la simulation de 100 premiers états de la chaîne de Markov.
La matrice S est la matrice des effectifs des trois états 1,2 et 3 à l'instant 100 après 1000 simulations de la chaîne.
C'est-à-dire que `S(1)` compte le nombre de fois au cours des 1000 simulations où |verb|X(100)| (le centième état) était l'état numéro 1, `S(2)` le nombre de fois où `X(100)` valait 2 et `S(3)` le nombre de fois où `X(100)` valait 3 .
Le diagramme en bâton obtenu est donc le diagramme des fréquences des états 1,2 et 3 au cours de 1000 simulations de la variable $X(100)$. Il donne donc la loi empirique de $X(100)$ après 1000 simulations.

(c) Le nombre de simulations de la variable $X(100)$ est de 1000, soit suffisamment grand pour que sa loi empirique soit une approximation convenable de sa loi théorique. On remarque donc que sa loi théorique est proche d'une loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$ ce qui est cohérent avec le résultat de la question 2.(c) où on a prouvé que la loi théorique de X_n convergeait vers une uniforme sur $[\![1;3]\!]$ lorsque n tendait vers $+\infty$.

Exercice 2. : **EML 2010**

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices symétriques d'ordre 2

— On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
— On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
— On note $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $b = c$, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = aF + bG + dH$$

donc $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(F, G, H)$ est un sous-espace vectoriel, et (F, G, H) en est une famille génératrice.

On résout ensuite :

$$aF + bG + cH = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = d = 0$$

donc la famille (F, G, H) est libre, et $card(F, G, h) = 3 = dim(\mathcal{S}_2)$, donc c'est une base de $\mathcal{S}_2$.

On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\boldsymbol{\mathcal{S}_2}$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

2. (a) Soit $S = aF + bG + cH = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$, alors

$$u(S) = \begin{pmatrix} 4c & 4b+6c \\ 4b+6c & 4a+12b+9c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$$

car on reconnaît une matrice symétrique.

(b) Soit S et M dans $\mathcal{S}_2$ et λ un réel, on a :

$$u(\lambda S + M) = A(\lambda S + M)A = (\lambda AS + AM)A = \lambda ASA + AMA = \lambda u(S) + u(M)$$

donc u est linéaire, et c'est une application de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{S}_2$ d'après la question précédente, donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{S}_2$.

(c) On calcule :

$$AFA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4H, \quad , \quad AGA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4G+12H \quad \text{et} \quad AHA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 4F+6G+9H$$

(d) D'après la question 2.(c) on a :

$$Mat(F,G,H)(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3

1. $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrons que cette famille est libre :
On résout l'équation (E) : $aB + bC + cE = 0$ d'inconnues a, b et c réels :
$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4a+4b+c & 3a-2b+2c \\ 3a-2b+2c & -4a+b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+4b+c &= 0 \\ 3a-2b+2c &= 0 \\ -4a+b+4c &= 0 \end{cases}$. On résout ce système par la méthode du pivot, on obtient $a = b = c = 0$.
Ainsi, la famille (B, C, E) est libre à $3 = dim(\mathcal{S}_2)$ vecteurs donc c'est une base de $\mathcal{S}_2$.

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $u(B) = ABA = \begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} = -4B$.
$u(C) = ACA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = C$.
$u(E) = AEA = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 32 & 64 \end{pmatrix} = 16E$.

3. **Informatique :** D'après l'égalité $M = PDP^{-1}$, on sait que -4, 1 et 16 sont les valeurs propres de M et que $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres respectivement associés à chacune de ces valeurs propres.

Or le vecteur $\begin{pmatrix} -0.2182179 \\ -0.4364358 \\ -0.8728716 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc c'est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 16 (car $E_{16}(M)$ est un espace vectoriel donc stable par multiplication par un scalaire).
De même, les vecteurs $\begin{pmatrix} -0.8728716 \\ 0.4364358 \\ -0.2182179 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -0.6246950 \\ -0.4685213 \\ 0.6246950 \end{pmatrix}$ sont respectivement colinéaires à $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

et à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 1 et -4.

On a donc bien dans P une base de vecteurs propres et dans D les valeurs propres associées dans le bon ordre.

4. On fait les calculs : c'est un produit de matrices diagonales, assez rapide.

5. En développant on en déduit que

$$D^3 - 13D^2 - 52D + 64I = 0$$

Pour faire apparaître M, on multiplie par P à gauche et P^{-1} à droite :

$P(D^3-13D^2-52D+64I)P^{-1} = P0P^{-1} = 0 \quad \text{donc} \quad PD^3P^{-1}-13PD^2P^{-1}-52PDP^{-1}+64PIP^{-1} = 0$

De plus on montre par récurrence ou seulement sur les quelques cas particuliers ici que $PD^nP^{-1} = M^n$ donc on a :

$$M^3 - 13M^2 - 52M + 64I = 0 \quad \text{et enfin} \quad M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$$

6. La relation précédente se réécrit :

$$\left[Mat_{(F,G,H)}(u)\right]^3 = 13\left[Mat_{(F,G,H)}(u)\right]^2 + 52\left[Mat_{(F,G,H)}(u)\right] - 64\left[Mat_{(F,G,H)}(e)\right]$$

donc

$$\left[Mat_{(F,G,H)}(u^3)\right] = 13\left[Mat_{(F,G,H)}(u^2)\right] + 52\left[Mat_{(F,G,H)}(u)\right] - 64\left[Mat_{(F,G,H)}(e)\right]$$

et enfin

$$\left[Mat_{(F,G,H)}(u^3)\right] = \left[Mat_{(F,G,H)}(13u^2 + 52u - 64e)\right]$$

Par l'isomorphisme existant entre les applications linéaires et les matrices, une base étant fixée, on en déduit :

$$u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$$

Exercice supplémentaire

Exercice 3. : **EDHEC 2009**

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2$$

On rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de l'espace vectoriel E constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Pour tout polynôme de E, on a $\deg(P) \leqslant 2$ donc $\deg P'' \leqslant 0$.

D'autre part $\deg P' \leqslant 1$ de la même manière et enfin $\deg P \leqslant 2$; on en déduit que $\deg f(P) \leqslant 2$, et $f(P) \in E$ donc f est une application de E dans E.

D'autre part on a pour tous P et Q de E et tout λ réel :

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - 5(\lambda P + Q)' + 6(\lambda P + Q) = \lambda P'' + Q'' - 5\lambda P' - 5Q' + 6\lambda P + 6Q$$

$$f(\lambda P + Q) = \lambda(P'' - 5P' + 6P) + (Q'' - 5Q' + 6Q) = \lambda f(P) + f(Q)$$

et f est linéaire, donc c'est un endomorphisme de E.

2. Pour tout x réel on a $f(e_0)(x) = 0 - 5 \times 0 + 6 = 6 = 6e_0(x)$ donc $f(e_0) = 6e_0$.

   $f(e_1)(x) = 0 - 5 + 6x = (6e_1 - 5e_0)(x)$ donc $f(e_1) = -5e_0 + 6e_1$.

   $f(e_2)(x) = 2 - 5 \times (2x) + 6x^2 = (6e_2 - 10e_1 + 2e_0)(x)$ donc $f(e_2) = 2e_0 - 10e_1 + 6e_2$.

   Enfin on obtient
$$A = Mat_{(e_0,e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. (a) A est inversible car elle triangulaire sans 0 sur la diagonale donc f est un isomorphisme ; on a vu que c'est un endomorphisme de E donc c'est bien un automorphisme de E.

   On en déduit que f est injective, donc $\ker(f) = \{0\}$.

   (b) Après calculs (pénibles), on obtient
$$Mat_{(e_0,e_1,e_2)}(f^{-1}) = A^{-1} = \frac{1}{108}\begin{pmatrix} 18 & 15 & 19 \\ 0 & 18 & 30 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

4. (a) A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux ; on en déduit que $\operatorname{Sp} A = \{6\}$.
   On résout :
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6(A) \iff AX = 6X \iff (A - 6I)X = 0 \iff \begin{cases} -5y + 2z = 0 \\ -10z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$X \in E_6(A) \iff \begin{cases} -5y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   donc $E_6(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

   (b) $\operatorname{Sp}(f) = \operatorname{Sp}(A) = \{6\}$.
   $E_6(f) = Vect(e_0)$ car e_0 est le polynôme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Partie 2

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F.
On considère l'application g qui, à toute fonction u de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

1. Pour toute fonction u de classe C^∞, u' et u'' le sont aussi donc $g(u) = u'' - 5u' + 6u$ est de classe C^∞ et g est bien une fonction de F dans F.

   De plus pour tous u, v de F et tout réel λ,
$$g(\lambda u + v) = (\lambda u + v)'' - 5(\lambda u + v)' + 6(\lambda u + v) = \lambda u'' + v'' - 5\lambda u' - 5v' + 6\lambda u + 6v$$
$$g(\lambda u + v) = \lambda(u'' - 5u' + 6u) + (v'' - 5v' + 6v) = \lambda g(u) + g(v)$$
   donc g est linéaire : c'est un endomorphisme de F.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer $\ker(g - 6Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\ker(g - 6Id)$.

(a) j est de classe C^∞ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$j'(x) = u''(x)e^{-5x} - 5u'(x)e^{-5x} = (u''(x) - 5u'(x))e^{-5x} = (g(u) - 6u)(x)e^{-5x} = 0 \times e^{-5x} = 0$$

donc j est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

(b) Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad j(x) = u'(x)e^{-5x} = \lambda \quad \text{donc } u'(x) = \lambda e^{-5x}$$

On en déduit en primitivant qu'il existe un réel μ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{\lambda}{-5}e^{-5x} + \mu$$

En posant $a = \frac{\lambda}{-5}$ on a $u \in \text{Vect}[u_1, u_2]$ donc $\ker(g - 6\,\text{Id}) \subset \text{Vect}[u_1, u_2]$.

D'autre part en prenant $u \in \text{Vect}[u_1, u_2]$, u est de classe C^∞ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = a + be^{5x} \quad \text{donc} \quad u'(x) = 5be^{5x} \quad \text{puis} \quad u''(x) = 25be^{5x}$$

donc

$$g(u)(x) - 6u(x) = (25b - 5 \times 5b + 6b - 6b)e^{5x} + 6a - 6a = 0e^{5x} + 0 = 0$$

On en déduit que $g(u) = 0$ donc $u \in \ker(g - 6\,\text{Id})$ et $\text{Vect}[u_1, u_2] \subset \ker(g - 6\,\text{Id})$.

Finalement on obtient $\ker(g - 6\,\text{Id}) = \text{Vect}[u_1, u_2]$.

On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\ker(g)$. On considère donc u une fonction de $\ker(g)$.

3. On pose $v = u' - 2u$.

(a) v est de classe C^∞ et

$$v' = u'' - 2u' = (u'' - 5u' + 6u) + (3u' - 6u) = g(u) + 3(u' - 2u) = 0 + 3v = 3v$$

(b) h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = v'(x)e^{-3x} - 3v(x)e^{-3x} = (v'(x) - 3v(x))e^{-3x} = 0e^{-3x} = 0$$

donc h est constante sur $\mathbb{R}$.

(c) On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$v(x)e^{-3x} = \alpha \quad \text{donc} \quad v(x) = \alpha e^{3x}$$

4. On pose $w = u' - 3u$.

(a) w est de classe C^∞ et

$$w' = u'' - 3u' = (u'' - 5u' + 6u) + (2u' - 6u) = g(u) + 2(u' - 3u) = 0 + 2w = 2w$$

(b) k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k'(x) = w'(x)e^{-2x} - 2w(x)e^{-2x} = (w'(x) - 2w(x))e^{-2x} = 0e^{-2x} = 0$$

donc k est constante sur $\mathbb{R}$.

(c) On en déduit qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$w(x)e^{-2x} = \beta \quad \text{donc} \quad w(x) = \beta e^{2x}$$

5. (a) Montrons tout d'abord l'inclusion $\ker(g) \subset \text{Vect}[u_3, u_4]$.

Soit $u \in \ker(g)$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(u' - 2u)(x) = \alpha e^{-3x} \quad \text{et} \quad (u' - 3u)(x) = \beta e^{-2x}.$$

On combine pour obtenir u :

$$(u' - 2u)(x) - (u' - 3u)(x) = u(x) = \alpha e^{-3x} - \beta e^{-2x}$$

et $u = \alpha u_3 - \beta u_4 \in \text{Vect}[u_3, u_4]$ donc $\ker(g) \subset \text{Vect}[u_3, u_4]$.

Prouvons à présent la deuxième inclusion.
Si $u \in \text{Vect}[u_3, u_4]$, il existe des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = ae^{2x} + be^{3x}$$

donc u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ car u_3 et u_4 le sont et pour tout x réel :

$$u'(x) = 2ae^{2x} + 3be^{2x} \quad , \quad u''(x) = 4ae^{2x} + 9be^{3x}$$

et enfin

$$g(u)(x) = (4a - 10a + 6a)e^{2x} + (9b - 15b + 6b)e^{3x} = 0e^{2x} + 0e^{3x} = 0$$

donc $g(u) = 0$, $u \in \ker(g)$, et $\text{Vect}[u_3, u_4] \subset \ker(g)$.

Finalement on obtient bien $\ker(g) = \text{Vect}[u_3, u_4]$.

(b) (u_3, u_4) est une famille génératrice de $\ker(g)$; montrons qu'elle est libre.

Soient a et b des réels tels que $au_3 + bu_4 = 0$, alors $ae^{2x} + be^{3x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $f(x) = \frac{ae^{2x}+be^{3x}}{e^{3x}} = 0$ sur $\mathbb{R}$ puis $ae^{-x} + b = 0$ sur $\mathbb{R}$.

On prend la limite en $+\infty$ des deux quantités, et l'unicité de la limite donne $b = 0$.

On en déduit que $ae^{2x} = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc on prenant $x = 0$ on obtient $ae^0 = a = 0$ donc on a :

$$au_3 + bu_4 = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

donc (u_3, u_4) est libre et génératrice de $\ker(g)$; c'est donc une base de $\ker(g)$, qui admet deux vecteurs donc $\dim \ker(g) = 2$.

(Remarque : on pouvait aussi prendre deux valeurs de x simples (0 et 1) pour obtenir un système de deux équations qu'on résolvait pour obtenir $a = b = 0$.)