Devoir maison n° 7

A rendre le Mardi 17 Décembre 2019

Exercice 1.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2; 1; -2)$

1. (a) Montrer que $ker(f) = Vect(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? On répondra à cette question sans faire le moindre calcul.
2. (a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la 2-ième coordonnée dans B vaut 1, et tel que $f(v) = u$.
   (b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$,dont la 2-ième coordonnée dans B vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0; 1; -1)$.
   (c) Montrer que $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. (a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   (b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.
4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),
   (a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = Vect(I; N; N^2)$.
   On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Établir que : "$M \in C_A$ " $\Leftrightarrow$ " $P^{-1}MP \in C_N$ ". En déduire que $C_A = Vect(I; A; A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 2.

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
   (c) **Informatique :**
      i. Recopier et compléter (à l'aide de la fonction `rand()`) le programme suivant qui mémorise dans la variable `e` le nombre d'erreurs de transmissions obtenues lors de 100000 envois de courriers indépendants.

```
e=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.7 then
        if ********** then
            e=e+1
        end
    else
        if ********** then
            e=e+1
        end
    end
end
```

ii. Rajouter une instruction à la fin du programme de façon à afficher une valeur approchée de la probabilité qu'il y ait une erreur de transmission.

iii. On modifie le programme précédent (les **** sont les mêmes instructions que précédemment) de la façon suivante :

```
e=0
a=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.7 then
        if ********* then
            a=a+1
            e=e+1
        end
    else
        if ********* then
            e=e+1
        end
    end
end
f1=a/100000
f2=e/100000
disp(f1/f2)
```

Indiquer quel est l'évènement dont la fréquence est calculée dans la variable `f1` et quel est l'évènement dont la fréquence est calculée dans la variable `f2`.
Le nombre affiché $(f1/f2)$ sera proche de quelle valeur ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour $k \geqslant 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

(a) Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geqslant 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

(b) Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(L_1 = k) = 1$$

(c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

(d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2).

(e) En déduire la loi de L_2

(f) **Informatique :**

i. Recopier et compléter la fonction suivante qui simule l'expérience de la partie 2. et renvoit en sortie les valeurs des variables L_1 et L_2 :

```
function [L1,L2]=prem_et_deux_series()
    L1=1
    if rand()<0.7 then
        while ******* do
            L1=L1+1
        end
        L2=1
        while ******* do
            L2=L2+1
        end
```

```
    else
        while ********* do
            L1=L1+1
        end
        L2=1
        while *********** do
            L2=L2+1
        end
    end
endfunction
```

ii. A la suite de ce programme, écrire une suite d'instructions, faisant appel à la fonction `prem_et_deux_series` qui calculent et affichent une valeur approchée de l'espérance de L_1, obtenue à l'aide de 100000 simulations indépendantes de l'expérience.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   (c) Montrer que
   $$\forall k \geqslant 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2 (0.3)^{k-2}$$

   (d) **Informatique :** Ecrire à l'aide de la fonction rand() une instruction en Scilab simulant le choix du serveur A ou B (on simulera une variable X valant 1 si le serveur A est choisi et 0 sinon).

   (e) **Informatique :** En déduire un programme en Scilab simulant la loi de T_1 et un autre simulant la loi de N_n, où n est donné par l'utilisateur.
   On utilisera la fonction rand() et non la fonction grand.

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre 1.
   Le prix en euros W de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

   (a) Rappeler la loi de Z.

   (b) Quel est le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A ?

   (c) Exprimer W en fonction de Z.

   (d) Déterminer la loi de W.

   (e) Déterminer l'espérance et la variance de la variable W.

   (f) **Informatique :**

      i. Ecrire une suite d'instruction, utilisant la commande `grand` avec l'option `'poi'`, construisant un vecteur ligne `W` contenant 10000 simulations indépendantes de la variable aléatoire W.

      ii. On rajoute à la suite de ce programme les instructions suivantes :

```
m=mean(W)
disp(m,"m=")

v=mean(W.^2)-m^2
disp(v,"v=")
```

      Après exécution, la console affiche :

```
 m=

    1.10091

 v=

    0.0099422
```

      Commenter.

Exercice 3.
Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^\times$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^\times$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1 - p$.
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}, \quad P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}, \quad P(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.
   (b) En déduire que $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.
5. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.
   Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.
   (d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.
6. **Informatique :** Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
   (a) Compléter la fonction suivante qui prend n en entrée, simule l'expérience aléatoire étudiée, et renvoit en sortie la valeur prise par X_n.

```
function x=X(n)
x=0
for k=1:n do
   u=floor(rand()*3)
   if u==2 then
      x=***********
   else
      x=**********
   end
end
endfunction
```

   (b) Quelle instruction faut-il taper dans la console pour obtenir la valeur d'une simulation de la variable X_{10} ?

(c) On ajoute à la suite du programme précédent les instructions :

```
p=1/3
n=10

x=zeros(1:10000)
for k=1:10000 do
    x(k)=X(n)
end

disp(mean(x),"m emp =")
disp(p*(1-p^n)/(1-p), "m th =")

disp(mean(x.^2)-mean(x)^2,"v emp=")
disp(p/((1-p)^2)*(1-(2*n+1)*p^n*(1-p)-p^(2*n+1)), "v th=")
```

Après exécution, la console affiche :

```
 m emp =

    0.5108

 m th =

    0.4999915

 v emp=

    0.7548834

 v th=

    0.7498222
```

Indiquer ce que fait ce programme et commenter les résultats obtenus.