Indication du devoir maison n° 7

Exercice 1.

1. (a) On passe par A pour le calcul puisque A est la matrice de u. On n'oublie pas ensuite de conclure sur f en écrivant les vecteurs dont la matrice dans la base B est dans le noyau de A.

   (b) On utilisera la question précédente pour remarquer que f n'est pas bijective et conclure sur A.

2. (a) On demande LE vecteur donc il faut prouver que c'est le seul, et résoudre proprement l'équation matricielle associée puisqu'on connait A et non f.

   On fait les calculs sur les matrices, mais on n'oublie pas de conclure sur f en remettant les vecteurs en ligne.

   (b) Même méthode. Le résultat étant donné, il faut être particulièrement vigilant à l'énoncé de la question pour résoudre tout de même le système (sinon on ne prouve pas que c'est le seul).

   (c) Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel dont on connaît la dimension, on justifie que le cardinal de la famille est égal à la dimension de l'espace puis on prouve la liberté.

   Pour obtenir la liberté d'une famille, on utilise un des deux cas particuliers s'il y a deux vecteurs ou moins, mais on résout obligatoirement un système s'il y a trois vecteurs ou plus.

3. (a) Il faut déterminer les images par f de u, v et w en fonction de u, v et w. Pour v et w c'est évident.

   Pour u, on revient aux matrices pour calculer, mais on revient sur des vecteurs en ligne pour écrire $f(u)$, puis on résout un système si on ne voit pas de décomposition évidente.

   (b) A et N sont deux matrices d'une même application linéaire f donc il faut invoquer proprement la formule de changement de base.

   On calcule d'abord les puissances de N (matrice plus simple (réduite de A)), puis on prouve par récurrence une formule bien connue pour obtenir les puissances de A en fonction de celles de N.

4. (a) Ecrire C_N avec des notations mathématiques : C_N est un ensemble défini sous forme implicite, on prouve que c'est un sous-espace avec la caractérisation des sous-espaces.

   Pour l'expliciter, il faut résoudre une équation matricielle d'inconnue N : on prend pour cela une matrice quelconque et on n'oublie pas que l'inconnue de départ est N pour arriver à conclure.

   (b) L'équivalence est une question ultra classique, dont on doit savoir qu'on peut la prouver par équivalence, sans revenir à une double implication.

   On écrit proprement au préalable le lien entre A et N dans les deux sens pour pouvoir l'utiliser.

   Ensuite on explicite C_A en déterminant M à l'aide de $P^{-1}MP$ qui est connu grâce à la question 4.(a), donc on peut en déduire M.

   Pour donner la dimension d'une espace, on en donne une base.

   Pour obtenir une base d'un espace dont la dimension est inconnue, on justifie qu'une famille est génératrice puis on prouve sa liberté.

Pour obtenir la liberté d'une famille, on utilise un des deux cas particuliers s'il y a deux vecteurs ou moins, mais on résout obligatoirement un système s'il y a trois vecteurs ou plus.

Exercice 2.

1. (a) Faire un arbre au brouillon pour comprendre et écrire l'évènement à l'aide des épreuves élémentaires dont on connaît les probabilités.

   (b) Traduire en une probabilité conditionnelle, puis :
   - On essaie d'abord de traduire le "sachant que" pour calculer la probabilité par les méthodes habituelles de décomposition d'évènements.
   - Si le "sachant que" ne permet pas d'obtenir une situation claire, on passe alors par la définition d'une probabilité conditionnelle .

   (c)

2. (a) Ecrire à nouveau l'évènement en fonction des tirages élémentaires dont on connaît les probabilités.

   (b) Calculs de sommes assez simples : ne pas confondre somme finie et infinie, et ne pas oublier de justifier la convergence de chaque série.

   (c)
   - Calcul de somme qui ne doit pas poser de gros problèmes. Attention à bien justifier de la convergence **absolue**.
   - Pour obtenir la convergence d'une somme et sa valeur, on passe par la somme partielle et un télescopage ou par les séries usuelles.

   (d)
   - Commencer par $L_1(\Omega)$ et $L_2(\Omega)$!
   - Puis calculer $P[(L_1 = i) \cap (L_2 = j)]$:
     1) soit en traduisant l'évènement $(L_1 = i) \cap (L_2 = j)$ à l'aide des évènements élémentaires (ce qu'il faut faire ici),
     2) soit en utilisant les probas composées : si cette traduction est compliquée et surtout si la seconde variable L_2 est très dépendante de L_1

   (e)
   - Normalement, $L_2(\Omega)$ a déjà été obtenue.
   - C'est une loi marginale du couple, On la calcule en décomposant l'évènement $L_2 = k$ (k fixé) sur le système complet de tous les évènements $((L_1 = i)$ où i va de 1 à $+\infty$.

   (f)

3. (a) Loi usuelle évidente.

   (b) Idem.

   (c) La loi du deuxième succès peut s'obtenir de deux manières :
   - En décomposant l'évènement $T_2 = k$ sur le système complet d'évènements $((T_1 = i))_{i\in\mathbb{N}}$ (on fait apparaître le premier succès pour avoir plus d'informations), ou :
   - En utilisant astucieusement les lois binomiales du nombre de succès : $(T_2 = k)$ signifie **exactement** un succès lors des $k-1$ premiers tirages (qui s'écrit avec ces lois binomiales) et un succès au dernier tirage (qu'on connaît bien, et qui est clairement indépendant de l'autre).Cette méthode est la seule qui permet de calculer la loi du nième succès si $n > 2$.

   (d) On rappelle que la fonction rand() choisie un réel au hasard dans le segment $[0; 1]$.
   Ainsi, en Scilab, on crée un évènement de probabilité $0,7$ par l'instruction $rand() < 0,7$.
   La variable X doit donc valoir 1 si cet évènement est vérifié et 0 sinon.

(e) Pour simuler une géométrique, on répète une expérience tant qu'il y a échec et on introduit un compteur T qui compte le nombre d'expériences ainsi réalisées.
On a alors simulé une variable T qui est le rang d'apparition du premier succès donc qui suit une loi géométrique.

Pour simuler une binomiale de taille n, on répète n expériences avec une boucle for et on introduit un compteur N qui vaut 0 au début et auquel on rajoute 1 à chaque fois qu'on a obtenu un succès.
On a alors simulé une variable N qui compte le nombre de succès donc qui suit une loi binomiale.

4. (a) Formules de cours.

   (b) Idem.

   (c) Evident. Attention cependant à bien écrire W en fonction de Z (qui sont des nombres) et pas $(W = k)$ en fonction de $(Z = ...)$.

   (d) C'est la loi d'une fonction de Z donc on transforme l'évènement $(W = ...)$ pour obtenir $(Z = ...)$ car on est ramenés à la loi de Z que l'on connait.

   (e) Evident : c'est la linéarité de l'espérance.

   (f)

Exercice 3.
On remarque que la suite de variables aléatoires (X_n) est une chaîne de Markov.

1. (a) On vous demande de traduite $(T = k)$ par $(X_1 = ...) \cap (X_2 = ...) \cap .....$
   Bien comprendre ce que représentent X_i et T, c'est alors assez simple.

   (b) Evident. Ne pas oublier $X_1(\Omega)$!

   (c) – Le "en déduire" est un peu surréaliste ; il concerne le a) et pas le b).

   – Utiliser la question 1, en faisant attention à la dépendance avant de traiter les intersections...

2. (a) Ecrire une récurrence très propre et ne pas oublier que chaque valeur de $X_{n+1}(\Omega)$ doit être justifiée lors de l'hérédité (pas seulement la dernière).

   (b) – Un système complet d'évènements permet d'utiliser quelle formule ?

   – Même sans l'indication, pour obtenir l'instant $n + 1$ en fonction de l'instant n, on utilise....

3. (a) On demande à nouveau l'instant $n + 1$ en fonction de l'instant n.

   (b) – Raisonner par récurrence sur n en faisant très attention à écrire la bonne propriété de récurrence ($\mathcal{P}(n)$:"$\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $P(X_n = k) = p^k(1-p)$") et à traiter l'hérédité en conséquence.

   – La deuxième se prouve aussi par récurrence sur n, beaucoup plus simple.

   (c) Ne pas confondre somme finie et infinie.

4. Programme sans grande difficulté. Il faut comme toujours bien comprendre l'expérience.

5. (a) – Résultat classique, qui s'obtient en partant de la somme géométrique et en dérivant.

- Le résultat étant donné, on peut également raisonner par récurrence.

(b) Appliquer le résultat et calculer proprement ; la méthode est par contre évidente.

6. (a) – On cherche $E(X_{n+1}^2)$, on applique le théorème de transfert.

- Il est alors évident de voir comment on applique le 3)a). Attention, la propriété n'est pas valable pour tout les k !

- Pour faire apparaître le théorème de transfert sur X_n, un changement d'indice s'impose alors : la suite est ensuite facile.

(b) Appliquer ce qui précède pour lier $E(X_{n+1}^2$ à $E(X_n^2)$; ne pas oublier que $E(X_n)$ a été calculée plus tôt.

(c) – La suite (u_n) est un peu particulière... c'est une suite usuelle dont on sait calculer l'expression.

- On cherche ensuite $E(X_n^2)$, il faut trouver une égalité la concernant et l'isoler.

(d) Le calcul est lourd mais la méthode est évidente.

7.