# Correction du devoir maison $n^{\text{o}}$ 7

**Exercice 1.** : **EDHEC 2006**
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note $I$ la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. (a) Passons par le noyau de $A$ :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff AX = 0 \iff \begin{array}{r} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10y + 7z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ -2x - 8y - 6z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{array}{r} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10y + 7z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10y - 14y = 0 \\ z = -2y \\ 0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} x = 2y \\ z = -2y \end{array} \right.$$

$$X \in \ker(A) \iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $\ker(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ et $\ker(f) = \text{Vect}(2; 1; -2) = \text{Vect}(u)$.

(b) Comme $\ker(f) \neq \{0\}$ alors $f$ n'est pas injective donc pas bijective donc $A$ n'est pas inversible.

2. (a) Soit $v = (x, 1, z)$.

$$f(v) = u \iff A \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10 + 7z = 2 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 0 \end{array} \right.$$

$$f(v) = u \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3 \\ z = -2 \end{array} \right.$$

L'unique vecteur $v$ vérifiant $f(v) = u$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$v = (3, 1, -2)$$

(b) Soit $w = (x, 1, z)$.

$$f(w) = v \iff A \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ -2x - 8 - 6z = -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} 2x + 10 + 7z = 3 \\ x + 4 + 3z = 1 \\ 2 + z = 1 \end{array} \right.$$

$$f(v) = u \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

L'unique vecteur $w$ vérifiant $f(w) = v$ avec une deuxième coordonnée égale à 1 est donc :

$$w = (0, 1, -1)$$

(c) La famille $(u, v, w)$ comprend trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Il suffit donc de démontrer que la famille est libre et on résout le système :

$$xu+yv+zw=0 \Longleftrightarrow x(2,1,-2)+y(3,1,-2)+z(0,1,-1)=0 \Longleftrightarrow \begin{array}{r} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ x+y+z=0 \\ -2x-2y-z=0 \end{array} \right.$$

$$xu+yv+zw=0 \Longleftrightarrow \begin{array}{r} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x+3y=0 \\ -y+2z=0 \\ y-z=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right.$$

Donc la famille est libre et $card(u, v, w) = 3)dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. (a) On a $u \in \ker f \Longleftrightarrow f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N$ est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale : il n'y a que 0. on en déduit que

$$\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(N) = \{0\}$$

On a $E_0(A) = Ker(A)$ donc $E_0(f) = \ker f = \mathrm{Vect}(u)$

(b) La formule de changement de base donne :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = PNP^{-1}$$

On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0$$

Donc :

$$\forall k \geqslant 3, \quad N^k = N^3 N^{k-3} = 0 \quad \text{et } A^k = P\,N^k P^{-1} = 0$$

4. $C_N = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad ; \quad MN = NM\}$

(a) On peut vérifier les les critères de sous espaces :

— $C_N \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

— $0\,N = 0 = N\,0$ donc $O \in C_N$.

— Soient $\alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et $M$ et $M'$ de $C_N$ alors :

$$(\alpha M + \beta M')\,N = \alpha MN + \beta M'N = \alpha NM + \beta NM' = N\,(\alpha M + \beta M')$$

Donc $(\alpha M + \beta M') \in C_N$, $C_N$ est stable par combinaison linéaire et c'est un sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ou plus rapidement, expliciter l'espace, ce qui sera de toute manière nécessaire pour obtenir la deuxième partie :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in C_N \Longleftrightarrow NM = MN \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

$$M \in C_N \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} d=0 & e=a & f=b \\ g=0 & h=d & e=i \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} d=0 & e=a & f=b \\ g=0 & h=0 & e=i \\ 0=0 & g=0 & h=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$M \in C_N \Longleftrightarrow M = aI + bN + cN^2$$

Donc $C_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) On procède par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff M\,A = A\,M \\ &\iff M\ P\ N\ P^{-1} = P\ N\ P^{-1}M \\ &\iff P^{-1}(M\ P\ N\ P^{-1})P = P^{-1}(P\ N\ P^{-1}M)P \\ &\iff (P^{-1}M\ P)\ N = N\ (P^{-1}MP) \\ &\iff P^{-1}MP \in C_N \end{aligned}$$

D'où, toujours par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}MP = aI + bN + cN^2 \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = P(P^{-1}MP)P^{-1} = aI + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = aI + bA + cA^2 \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right) \end{aligned}$$

donc

$$C_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$$

Pour avoir la dimension, reste à voire si la famille est libre ; au lieu de la traiter directement, on réutilise $N$ :

$$aI + bA + cA^2 = 0 \iff P(aI + bA + cA^2)P^{-1} = 0 \iff aI + bN + cN^2 = 0 \iff a = b = c = 0$$

car la famille $(I, N, N^2)$ est libre (évident car elle est échelonnée, ou bien on écrit le système d'équation).

La famille $(I, A, A^2)$ est libre et génératrice donc base de $C_A$, et celui-ci est donc de dimension 3.

**Exercice 2.** : **Ecricome 2004**

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur $A$ est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur $B$ est de 0.05.

(a) Posons les évènements :

$T$ : "il y a eu une erreur de transmission"
$A$ : "le serveur $A$ a été choisi"
$B$ : "le serveur $B$ a été choisi".

On remarque que

$$T = (A \cap T) \cup (B \cap T)$$

et par incompatibilité de la réunion et formule des probabilité composées,

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(T) + \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(T) = 0,7 \times 0,1 + 0,3 \times 0,05 = 0,07 + 0,015 = 0,085 = \frac{85}{1000}.$$

(b) On utilise la définition de la probabilité conditionnelle puis les probabilités composées :

$$\mathrm{P}_T(A) = \frac{\mathrm{P}(T \cap A)}{\mathrm{P}(T)} = \frac{0,07}{0,085} = \frac{70}{85} = \frac{14}{17}.$$

(c) **Informatique :**

i.
```
e=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.7 then
        if rand()<0.1 then
            e=e+1
        end
    else
        if  rand()< 0.05 then
            e=e+1
        end
    end
end
```

ii. On sait que la fréquence d'un évènement $T$ converge, lorsque le nombre de simulations indépendantes tend vers $+\infty$ vers $P(T)$.
On va donc afficher la fréquence de l'évènement $T$ définie par $f = \frac{\text{Nombre d'erreurs de transmission}}{\text{Nombre de simulations}} = \frac{e}{10000}$

```
f=e/100000
disp(f)
```

iii.
```
e=0
a=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.7 then
        if rand()<0.1 then
            a=a+1
            e=e+1
        end
    else
        if rand()< 0.05 then
            e=e+1
        end
    end
end
f1=a/100000
f2=e/100000
disp(f1/f2)
```

On remarque que la variable `a` compte (c'est un compteur !) le nombre de fois où le serveur $A$ a été choisi et il y a eu une erreur de transmission au cours des 10000 simulations, autrement dit la variable `a` contient l'effectif de l'évènement $A \cap T$.
$f1$ est donc la fréquence de l'évènement $A \cap T$.
De même, la variable `e` contient l'effectif de l'évènement $T$ donc $f_2$ est la fréquence de l'évènement $T$.

Ainsi, $\frac{f1}{f2}$ est une valeur approchée de $\frac{P(A\cap T)}{P(T)} = P_T(A) = \frac{14}{17}$.

2. (a) On pose les évènements :

$A_i$ : "le serveur $A$ a été choisi le $i$-ème jour"
$B_i$ : "le serveur $B$ a été choisi le $i$-ème jour.

On remarque que

$$(L_1 = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \cap B_k\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap A_k\right)$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance des choix de serveurs d'un jour à l'autre, $\forall k \geqslant 1$,

$$\mathrm{P}(L_1 = k) = (0,3)^k \times 0,7 + (0,7)^k \times 0,3.$$

(b) On reconnaît deux séries géométriques qui convergent car $|0,3| < 1$ et $|0,7| < 1$ donc la série

converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(0,3)^k \times 0,7 + (0,7)^k \times 0,3\right] = 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} (0,3)^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} (0,7)^k \\
&= 0,7 \times \frac{0,3}{1-0,3} + 0,3 \times \frac{0,7}{1-0,7} = \frac{0,7 \times 0,3}{0,7} + \frac{0,3 \times 0,7}{0,3} \\
&= 0,3 + 0,7 = 1.
\end{aligned}$$

(c) On considère $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\,\mathrm{P}(L_1 = k)$ : on reconnaît deux séries géométriques dérivées qui convergent car $|0,3| < 1$ et $|0,7| < 1$ donc cette série converge.

De plus la série est à termes positifs donc elle converge absolument. $L_1$ admet donc une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathrm{P}(L_1 = k) = 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} k\ (0,3)^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} k\ (0,7)^k \\
&= 0,7 \times 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} k\ (0,3)^{k-1} + 0,3 \times 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} k\ (0,7)^{k-1} \\
&= 0,7 \times 0,3 \times \frac{1}{(1-0,3)^2} + 0,3 \times 0,7 \times \frac{1}{(1-0,7)^2} = \frac{0,3}{0,7} + \frac{0,7}{0,3} = \frac{0,3^2 + 0,7^2}{0,3 \times 0,7} = \frac{0,09 + 0,49}{0,21} \\
&= \frac{0,58}{0,21} = \frac{58}{21}.
\end{aligned}$$

(d) On a $L_1(\Omega) = L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On remarque que selon le premier serveur qui a été obtenu, pour tous $k$, $j$ de $\mathbb{N}^*$, $(L_1 = k) \cap (L_2 = j)$ s'écrit :

$$(L_1 = k) \cap (L_2 = j) = \left[\bigcap_{i=1}^{k} A_i \bigcap_{i=k+1}^{k+j} B_i \cap A_{k+j+1}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k} B_i \bigcap_{i=k+1}^{k+j} A_i \cap B_{k+j+1}\right]$$

La réunion est incompatible et les choix successifs de serveurs indépendants donc :

$$\mathrm{P}(L_1 = k) = (0,7)^k (0,3)^j (0,7) + (0,3)^k (0,7)^j (0,3) = (0,7)^{k+1} (0,3)^j + (0,3)^{k+1} (0,7)^j$$

(e) On a déjà vu que $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, avec le système complet d'évènements $(L_1 = k)_{k \geqslant 1}$, la formule des probabilités totales donne :

$$(L_2 = j) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (L_1 = k) \cap (L_2 = j)$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(L_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left[(L_1 = k) \cap (L_2 = j)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} 0,7^{k+1} \times 0,3^j + 0,3^{k+1} \times 0,7^j \\
&= 0,3^j \sum_{k=2}^{+\infty} 0,7^k + 0,7^j \sum_{k=2}^{+\infty} 0,3^k = 0,3^j \times \frac{0,7^2}{1-0,7} + 0,7^j \times \frac{0,3^2}{1-0,3} \\
&= 0,7^2 \times 0,3^{j-1} + 0,3^2 \times 0,7^{j-1}
\end{aligned}$$

(f) **Informatique :**

i.
```
function [L1,L2]=prem_et_deux_series()
    L1=1
    if rand()<0.7 then
```

```
        while rand()<0.7 do
            L1=L1+1
        end
        L2=1
        while rand()<0.3 do
            L2=L2+1
        end
    else
        while rand()<0.3 do
            L1=L1+1
        end
        L2=1
        while rand()<0.7 do
            L2=L2+1
        end
    end
endfunction
```

*Remarque* : L'instruction `rand()<0.7` pouvait remplacer l'instruction `rand()<0.3` .

ii. L'espérance peut être approximée par la moyenne des valeurs prises par $L_1$ en 100000 simulations.

```
S=0
for k=1:100000 do
    [L1,L2]=prem_et_deux_series()
    S=S+L1
end
disp(S/100000)
```

3. (a) $N_n$ est le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de $n$ épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes de paramètre $0,7$. Elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n$ et $0,7$ c'est-à-dire :
$\forall k \in [\![0;n]\!]$,

$$\mathrm{P}\left(N_n = k\right) = \binom{n}{k} \, 0,7^k \; 0,3^{n-k}.$$

De plus $N_n$ admet une espérance et une variance et :

$$E\left(N_n\right) = 0,7\ n \quad \text{ et } \quad V\left(N_n\right) = 0,7 \times 0,3 \times n = 0,21\ n.$$

(b) $T_1$ compte le nombre d'épreuves de Bernouilli effectuées jusqu'au premier succès : elle suit la loi géométrique de paramètre 0,7 c'est-à-dire :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}\left(T_1 = k\right) = 0,3^{k-1} \times 0,7.$$

De plus $T_1$ admet une espérance et une variance et :

$$E\left(T_1\right) = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7} \quad \text{ et } \quad V\left(T_1\right) = \frac{0,3}{0,7^2} = \frac{0,30}{0,49} = \frac{30}{49}.$$

(c) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$(T_2 = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} [(T_1 = i) \cap (T_2 = k)]$$

Par incompatibilité 2 à 2 des évènements de l'union on a donc :

$$P(T_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P[(T_1 = i) \cap (T_2 = k)] = \sum_{i=1}^{k-1} P[B_1 \cap B_2 .... B_{i-1} A_i B_{i+1} ... B_{k-1} A_k]$$

Par indépendance des choix de serveurs, on obtient :

$$P(T_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} 0,7^2 (0,3)^{k-2} = (k-1) 0,7^2 (0,3)^{k-2}$$

(d) C'est la simulation d'une loi de Bernoulli de paramètre $0,7$ (simulation de loi usuelle à connaître par coeur) :

```
if rand() <0,7 then
   X=1
else
   X=0
end
disp(X)
```

(e) C'est la simulation d'une loi géométrique et d'une loi binomiale s'il est interdit d'utiliser grand (simulations de loi usuelle à connaître par coeur) :

**• Simulation de la variable géométrique $T_1$ :**

```
T=1
while rand() > 0,7 do
   T=T+1
end
disp(T)
```

**• Simulation de la variable binomiale $N_n$ :**

```
N=0
for k=1:n do
   if rand() < 0,7 then
      N=N+1
   end
end
disp(N)
```

4. (a) $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Z = k) = \frac{1^k e^{-1}}{k!} = \frac{1}{k!e}$.

(b) Il vaut $E(Z) = 1$.

(c) $W = 1 + \frac{Z}{10}$.

(d) On a $W(\Omega) = \left\{1 + \frac{n}{10} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$P\left(W = 1 + \frac{n}{10}\right) = P(Z = n) = \frac{1}{n!e}$.

(e) Par linéarité de l'espérance, $E(W) = 1 + \frac{E(Z)}{10} = \frac{11}{10}$.
$V(W) = (\frac{1}{10})^2 V(Z) = \frac{1}{100}$.

(f) **Informatique :**

i.
```
Z=grand(1,10000,'poi',1)
W=0.1*Z+1
```

ii. On remarque que $m$ est bien une valeur approchée de $E(W) = 1,1$ et que $v$ (la variance empirique de $W$) est bien une valeur approchée de sa variance théorique $V(W) = 0,01$.

**Exercice 3.** : **EDHEC 2005**

1. (a) $(T = k)$ signifie qu'on ne revient pas à 0 lors des $(k-1)$ premiers déplacements, donc qu'on avance à chaque fois de un d'après l'énoncé. Enfin au $k$-ème on revient à 0 :

$$(T = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i \neq 0) \cap (X_k = 0) = \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i) \cap (X_k = 0)$$

(b) On a $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$, puis d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_1 = 1) = p$$

(c) D'après les probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T = k) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i \neq 0) \cap (X_k = 0)\right) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \neq 0) \times \mathrm{P}_{(X_1 \neq 0)}(X_2 \neq 0) \times \cdots \times \mathrm{P}_{(X_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} \neq 0)}(X_k = 0) \\
&= p \times p \cdots \times p \times (1 - p) = p^{k-1} p
\end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p$.

2. (a) Montrons par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ :

— **Initialisation** On a montré que $X_0(\Omega) = \{0\}$ et $X_1(\Omega) = [\![0; 1]\!]$, ce qui initialise la récurrence.

— **Hérédité** : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ pour $n \geqslant 0$.

Si $X_n = k$, on sait que $X_{n+1}$ vaut $k+1$ avec la probabilité $p$ et 0 avec la probabilité $1-p$ donc :

$$X_{n+1}(\Omega) = \{0\} \cup \{k+1,\ k; \in [\![0; n]\!]\} = \{0\} \cup [\![1; n+1]\!] = [\![0; n+1]\!].$$

et la propriété est vraie au rang $(n+1)$.

— **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n(\Omega) = [\![0; n]\!].$$

(b) Avec le système complet d'évènement donné, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)(1-p) \\
&= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = (1-p) \times 1 \\
&= 1 - p.
\end{aligned}$$

3. (a) Pour avoir $X_{n+1} = k$ avec $k > 0$, il faut forcément avoir $X_n = k-1$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1} = k) &= \mathrm{P}([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k-1]) = \mathrm{P}(X_n = k-1)\, \mathrm{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) \\
&= p \times \mathrm{P}(X_n = k-1).
\end{aligned}$$

(b) On en déduit par une récurrence sur $0 \leqslant i \leqslant k$ que pour tout $n$, pour tout $k \leqslant n$ et pour tout $i \leqslant k$,

$$\mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X_{n-i} = k-i) p^i.$$

D'où :

$$\mathrm{P}(X_n = k) = \mathrm{P}(X_{n-k} = 0) \times p^k = p^k (1-p).$$

Enfin

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = n+1) = p\, \mathrm{P}(X_n = n)$$

donc la suite $[\mathrm{P}(X_n = n)]$ est géométrique de raison $p$ et on a

$$\mathrm{P}(X_n = n) = p^n\, \mathrm{P}(X_0 = 0) = p^n \times 1 = p^n$$

Pour avoir $X_n = n$ il faut avoir avancé d'un cran à chaque fois, donc à chaque épreuve il faut obtenir le résultat de probabilité $p$ : " avancer de 1 ".

(c) On calcule la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) &= p^n + (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} p^k = p^n + (1-p) \times \frac{1-p^n}{1-p} = p^n + (1-p^n) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4. (a) 3 méthodes pour montrer ce résultat très classique :

— Une récurrence.

— Dériver l'égalité $\sum_{k=1}^{n-1} p^k = \frac{1-p^{n-1}}{1-p} \times p = \frac{p-p^n}{1-p}$.

— Dériver l'égalité $\sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{1-p^n}{1-p}$.

(b) On en déduit que pour $n \geqslant 2$ (pour que la somme aie du sens),

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)p^k + np^n = p\,(1-p)\,\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\ &= p\left(\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{1-p} + np^{n-1}\right) = p\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1 + np^{n-1} - np^n}{1-p} \\ &= \frac{p(1-p^n)}{1-p}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que la formule est aussi valable pour $n = 0$ ($E(X_0) = \frac{p\times 0}{1-p} = 0$) et $n = 1$ ($E(X_1) = \frac{p\times(1-p)}{1-p} = p$).

5. (a) Avec le théorème de transfert, on écrit $E(X_{n+1}$ puis on remplace les probabilités de la somme avec le 3)a). Enfin on effectue un changement d'indice pour se ramener à la forme des probabilités pour l'espérance de $X_n$ :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2\,\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = 0^2\,\mathrm{P}(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \times p \times \mathrm{P}(X_n = k-1) \\ &= p\sum_{j=0}^{n}(j+1)^2\,\mathrm{P}(X_n = j) = p\left(\sum_{j=0}^{n} j^2\,\mathrm{P}(X_n = j) + 2\sum_{j=0}^{n} j\,\mathrm{P}(X_n = j) + \sum_{j=0}^{n}\mathrm{P}(X_n = j)\right) \\ &= p\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right). \end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= E(X_{n+1}^2) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} = pE(X_n^2) + 2pE(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= p\left(u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}\right) + 2p\frac{p(1-p^n)}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\ &= pu_n + \frac{2np^{n+2} + p^{n+2} - 2np^{n+2} + p^{n+2} + 2p^2 - 2p^{n+2} + p(1-p)}{1-p} = pu_n + \frac{p(2p+1-p)}{1-p} \\ &= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}. \end{aligned}$$

(c) La suite $(u_n)$ est arithmético-géométrique.

On résout l'équation :

$$l = pl + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff l(1-p) = \frac{p(1+p)}{1-p} \iff l = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

Ensuite on prouve que la suite $(v_n)$ telle que $v_n = u_n - l$ pour tout $n$ est géométrique de raison $p$, donc on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 p^n.$$

D'où on tire finalement :

$$u_n = (u_0 - l)p^n + l.$$

On calcule alors :

$$u_0 = E(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\frac{p^1}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$$

et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(-\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right)p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-p(1-p)-p(1+p)}{(1-p)^2}p^n + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{(2n-1)p^{n+1}-(2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2} \\ &= \frac{(2n-1)p^{n+2}-(2n+1)p^{n+1}+p(1+p)}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

(d) On en déduit que par la formule de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = \frac{(2n-1)p^{n+2}-(2n+1)p^{n+1}+p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\ &= \frac{(2n-1)p^{n+2}-(2n+1)p^{n+1}+p(1+p)-p^2(1+p^{2n}-2p^n)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[(2n-1)p^{n+1}-(2n+1)p^n+1+p-p-p^{2n+1}+2p^{n+1}\right] \\ &= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[1+(2n+1)p^{n+1}-(2n+1)p^n-p^{2n+1}\right] \\ &= \frac{p}{(1-p)^2} \times \left[1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right] \end{aligned}$$

6. **Informatique :** Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

(a) `u=floor(rand()*3)` choisit un nombre au hasard parmi 0, 1 et 2. Ainsi, Il faut comprendre que $(u == 2)$ est de probabilité $p = \frac{1}{3}$ donc code le fait qu'on avance de 1, et $(u \neq 2)$ est de probabilité $1-p$ donc code le retour à 0 :

```
function x=X(n)
x=0
for k=1:n do
   u=floor(rand()*3)
   if u==2 then
      x=x+1
   else
      x=0
   end
end
endfunction
```

(b) `-->X(10)`

(c) Ce programme mémorise dans un vecteur ligne $x$ 10000 simulations de la variable $X_{10}$ puis affiche dans l'ordre : l'espérance empirique de $X_{10}$ (moyenne des 10000 simulations), l'espérance théorique (mathématique) de $X_{10}$, la variance empirique de $X_{10}$ puis la variance théorique (mathématiques) de $X_{10}$.
Le nombre de simulations étant proche de $+\infty$, on obtient bien une espérance empirique proche de l'espérance mathématiques et une variable empirique proche de la variance mathématique.