Devoir maison n° 8

A rendre le Mardi 7 Janvier 2020

Exercice 1.
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

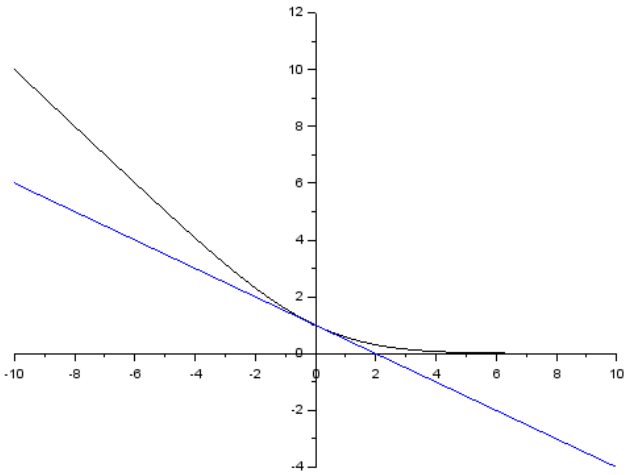
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
   (c) Montrer : $\quad f'(x) \underset{x \to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$
   (d) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   (e) Établir que f est de classe C^1.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
   $$u(x) = (1 - x)\, e^x - 1$$
   (b) Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau des variations de f.
3. On exécute le programme suivant :

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=1
    else
        y=x./(exp(x)-1)
    end
endfunction

x=linspace(-10,10,100)'
y=f(x)
z=1-1/2*x
plot2d(x,[y z])
```

On obtient le graphique :



Le nombre 0 fait-il partie de la liste des valeurs que contient le vecteur `x` ?
Vérifier et commenter la cohérence du graphique obtenu avec les résultats de la partie I.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0$

   (b) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}$

   (c) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$

   (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimier $G(x)$ en fonction de $F(2x)$ et $F(x)$.
   En déduire que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant l'égalité obtenue, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\left(3 - e^x\right)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Justifier l'encadrement :$\forall x \in [0;+\infty[\ \forall t \in [x;2x],\ 0 \leq f(t) \leq f(x)$; puis, en intégrant ces inégalités sur t allant de x à $2x$, montrer :
   $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).$
   En déduire la limite de G en $+\infty$.

   (b) Par un raisonnement similaire (*attention, lorsqu'on intègre sur des bornes décroissantes, on change le sens de l'inégalité !*) montrer : $\forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.$
   En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :
— D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé
— E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$
Lors d'une partie,
— si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
— si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
— si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Etude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geq 1$, on note :
— X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{ème}$ partie ;
— Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y_n.
7. **Informatique :**
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante qui simule un lancer de 2 dés (et mémorise le numéro des faces dans les variables d_1 et d_2) et renvoit en sortie le nombre x de points obtenus.

```
function x=simulX()
    d1=**********
    d2=**********
    if ******** then
        x=0
    elseif ********* then
        x=2
    else
        x=1
    end
endfunction
```

   (b) Recopier et compléter le programme (on fera appel à la fonction `simulX()`) afin qu'il simule 1000 fois l'expérience consistant à lancer 3 fois les 2 dés, à calculer $Y2$ et $Y3$ et à compléter un tableau N dont la i ème ligne et la j ième colonne contient le nombre de fois où l'évènement $(Y2 = i - 1) \cap (Y3 = j - 1)$ s'est réalisé au cours des 1000 expériences.

```
N=zeros(5,7)
for i=1:1000 do
    Y2=************
    Y3=************
    N(Y2+1,Y3+1)=N(Y2+1,Y3+1)+1
end
```

   (c) Rajouter des instructions pour afficher le tableau de la loi empirique du couple (Y_2, Y_3) sur 1000 simulations de l'expérience.

   (d) On rappelle que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y_2, Y_3) est défini par $\rho = \frac{cov(Y_2,Y_3)}{\sigma(Y_2)\sigma(Y_3)}$. Il permet de vérifier s'il y a une relation affine entre Y_2 et Y_3 i.e. :
   $\rho = \pm 1$ si et seulement si il existe $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = E(Y) - aE(X)$ réels (constants) tels que $Y_3 = aY_2 + b$.
   De plus, plus ρ est proche de -1 ou 1, plus la relation entre Y_2 et Y_3 est presque affine, à une erreur d'ajustement près.
      i. Etablir une égalité faisant intervenir Y_3, Y_2 et X_3.
      Y a-t-il une relation de dépendance affine entre Y_3 et Y_2 ?
      On remarquera tout de même que la relation n'est "pas loin d'être affine", à une erreur près autour de $b = E(X_3)$.
      ii. A la suite des programmes précédents, on ajoute le programme suivant :

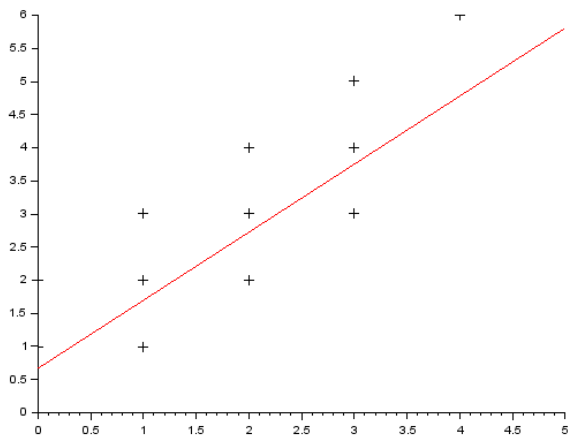
```
Y2=zeros(1,100)
Y3=zeros(1,100)
for i=1:100 do
    Y2(i)=simulX()+simulX()
    Y3(i)=Y2(i)+simulX()
end
plot2d(Y2,Y3,style=-1)

c=mean(Y2.*Y3)-mean(Y2)*mean(Y3)
v2=mean((Y2-mean(Y2)).^2)
v3=mean((Y3-mean(Y3)).^2)
cor=c/sqrt(v2*v3)
disp(cor, "cor=")


a=c/v2
disp(a,"a=")
b=mean(Y3)-a*mean(Y2)
disp(b,"b=")
plot(x,a*x+b,color='red')
```

Que calcule la variable `c` ? la variable `v2` ? la variable `cor` ?

iii. Après exécution, on obtient les valeurs :

```
cor=

   0.8151204

a=

   1.0274725

b=

   0.6687912
```

et le graphique :



Commenter la cohérence des valeurs de `cor`, `a` et `b` ainsi que le graphique obtenu.

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.

Plus précisément on note :

T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $\mathrm{P}(T_1 = k)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.
2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
   (b) Calculer les probabilités $\mathrm{P}(T_2 = 1)$ et $\mathrm{P}(T_2 = 2)$.
   (c) Prouver que, pour $k \geq 3$, on a :
$$\mathrm{P}(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$$
   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?
   (e) Etablir que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T_2 = k) = 1$.
   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
   (g) Calculer $E(T_2)$.

Exercice 3.

Partie 1 : préliminaires

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.
   (a) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que, pour tout couple (x,y) d'éléments de $[0,1]$ on a : $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$
   (c) *On rappelle que (inégalité triangulaire)* : $\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dt\right| \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt$.
   En intégrant l'inégalité de la question 1.(b), montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$
   (d) *On rappelle que (inégalité triangulaire)* : $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$.
   En sommant la relation de la question 1.(c), établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n}$
   (e) Conclure finalement que $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\,dt$.
   (f) **Informatique :** Définir une fonction d'en-tête `function I= integrale_approchee(f,n)` qui prend en entrée la fonction f et l'entier n et renvoit en sortie une valeur approchée de $\int_0^1 f$ i.e. la n ième somme de Riemann de f.
2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx$
   (a) Montrer par intégration par parties que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$.
   (b) En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$.
   (c) Déterminer $I(p+q,0)$ et montrer finalement que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, m est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, U_n suit la loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}$

On considère également une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et telles que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, et pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la loi de X_n conditionnellement à l'événement $\left(U_n = \frac{k}{n}\right)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{k}{n}\right)$.

1. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$. Rappeler la valeur de l'espérance de Y puis montrer que $E(Y(Y-1)) = m(m-1)p^2$
2. Donner la loi de X_1

Dans toute la suite, on suppose n supérieur ou égal à 2.

3. (a) Déterminer $X_n(\Omega)$, puis montrer que, pour tout i de $X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathrm{P}(X_n = i) = \frac{1}{n}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$$

   (b) Utiliser la première question de cette partie pour donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$.

   Montrer alors que l'espérance de X_n est égale à $\frac{m(n-1)}{2n}$

   (c) En utilisant toujours la première question de cette partie, donner sans calcul la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{m} i(i-1)\binom{m}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(1-\frac{k}{n}\right)^{m-i}$

   Montrer alors que l'espérance de $X_n(X_n-1)$ est égale à $\frac{m(m-1)(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

   (d) En déduire finalement que la variance de X_n est égale à $\frac{m(m+2)(n^2-1)}{12n^2}$

4. **Informatique :**

   (a) Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoit en sortie une simulation `x` de la variable X_n.
   Dans la première instruction on utilisera les fonctions `rand()` et `floor`. Dans la seconde, on utisera `grand`.

```
function x=simulX(m,n)
    u=*******
    x=*******
endfunction
```

   (b) Dans cette question, on prend $m = 100$ et $n = 10$.
   Compléter le programme précédent pour qu'il effectue 1000 simulations de la variable X_n, mémorisées dans un vecteur ligne x de taille 1×1000, puis qu'il affiche les moyennes empirique et mathématique de X_n pour les comparer, ainsi que les variances empirique et mathématique. On fera appel à la fonction `simulX` définie précdemment.