Devoir maison n° 9

A rendre le Mardi 21 Janvier 2020

Exercice 1. : chap 6

1. **Étude préliminaire**

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0,1[$ que la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

(a) Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n < k$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(c) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(d) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1[\qquad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

— On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

— Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance .

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X = k)$.

(c) Vérifier que : $\quad P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

(d) En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

(e) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

(f) Montrer : $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad P(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

(g) **Informatique** Ecrire en Scilab une `function x=simulX()` qui simule une fois cette expérience et renvoit en sortie la valeur x prise par la variable X.
On utilisera la commande `grand` avec les options `'geom'` et `'bin'`.

3. **Étude d'une variable à densité**

   On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ F(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

   (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité, notée Y.

   (b) Déterminer une densité f de Y.

   (c) Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\, e^{x \ln \frac{4}{9}}$.

   (d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et calculer $E(Y)$.

   (e) **La méthode d'inversion :** Nous admettons la propriété suivante (prouvée dans le TP 9) : Soit X une variable aléatoire à densité, de support $]x, y[$ et de fonction de répartition F . Notons G la réciproque de $F_{|]x;y[}$.
   On peut simuler une variable suivant la loi de Y grâce au théorème suivant : si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ alors $G(U)$ suit la même loi que Y.

      i. On remarque que dans cet exercice $Y(\Omega) =]a; +\infty[$. Montrer que $F_{|]a;+\infty[}$ (i.e. la restriction de F à l'intervalle $]a, +\infty[$) est une bijection de $]a; +\infty[$ dans $]0; 1[$ et déterminer l'expression de sa réciproque notée G.

      ii. En déduire, à l'aide du théorème précédent, une suite d'instructions permettant de simuler une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 2. : première année
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

6. Ecrire un programme en Scilab permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}, par méthode de dichotomie.

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5.** On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance $E(X)$.

3. Démontrer que pour $x > \alpha$:
$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$
En déduire que l'espérance de X est donnée par :
$$E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$
Donner un encadrement de $E(X)$ par deux entiers consécutifs.
4. La variable aléatoire réelle X admet-elle une variance ?

Exercice 3. : chap 8

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B. Est-ce que B est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$
3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et en déduire B^2 comme combinaison linéaire de B et I.
4. En déduire que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\quad h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto h(M) = AMB.$

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.
3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.
   (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
   Montrer : $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I2.**
   (b) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A\ N\ D = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$
   (c) En déduire les valeurs propres de h. Montrer que h est diagonalisable et, donner une matrice diagonale représentant h.
   (d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Montrer : $(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e) = 0$.

Exercice supplémentaire

Exercice 4. : chap 7

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x.

   On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$
2. Établir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln 2$$

   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.

   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5. (a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x, associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

   (c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

   (a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$.

   (b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

   (c) Conclure que : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

   (d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.