Correction du devoir maison n° 9

Exercice 1. : EML 2002

1. **étude préliminaire**

   (a) Comme on sait que la série converge, on travaille directement la somme infinie pour tout réel x de $[0,1[$, et on reconnaît des séries géométriques et géométriques dérivées :

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

   (b) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $k < n$, on a $k+1 \leqslant n$ donc les coefficients s'écrivent sous forme factorielle :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

   (c) On part du côté le plus compliqué (à droite) et on simplifie pour arriver de l'autre côté :

$$\begin{aligned}xs_k(x) + xs_{k+1}(x) &= x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^{n+1} + \binom{k}{k} x^{k+1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right] x^{n+1} + x^{k+1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+2}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m = s_{k+1}(x)\end{aligned}$$

   (d) Soit $x \in [0,1[$. On fait apparaître la relation de récurrence qui permettra de déterminer s_{k+1} à partir de s_k :

$$s_{k+1}(x) = xs_k(x) + xs_{k+1}(x) \Longleftrightarrow s_{k+1}(x)\,(1-x) = xs_k(x) \Longleftrightarrow s_{k+1}(x) = s_k\,(x)\,\frac{x}{1-x}.$$

   - **Initialisation** : pour $k = 0$ on a

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{x^0}{(1-x)^{0+1}}.$$

     donc la propriété est vraie au rang $k = 0$.

   - **Hérédité** : On suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ fixé tel que $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$, alors :

$$s_{k+1}(x) = s_k\,(x)\,\frac{x}{1-x} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+1+1}}$$

     et la propriété est vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion** : pour tout entier k,

$$s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. **étude d'une expérience aléatoire**

(a) La loi de N est celle de la première boule noire obtenue dans une suite de tirages indépendants ayant tous la même probabilité $1/5$ de donner une boule noire.

Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5)$ admet une espérance et

$$E(N) = \frac{1}{1/5} = 5.$$

(b) Quand $N = n$, on effectue n tirages indépendants dans l'urne. Donc le nombre X de boules noitres obtenues suit une loi binômiale de paramètres n et $1/5$, ce qui donne :

$$\mathrm{P}_{(N=n)}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

(c) Comme la probabilité dépend de la valeur de n, on utilise la formule des probabilités totales avec comme système complet d'événements $(N=n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$.

La série est convergente et

$$\mathrm{P}(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{P}_{(N=n)}(X=0)}_{\text{avec } 0\leqslant n}\mathrm{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5}$$

On regroupe les puissances pour n'avoir qu'une puissance n et on factorise les constantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=0) &= \frac{1}{5}\times\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^n - \left(\frac{16}{25}\right)^0\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{16}{25}} - 1\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{9}-\frac{9}{9}\right) = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

(d) $(N=n)_{n\in[\![1,+\infty]\!]}$ est là encore un système complet d'événements. Mais dans la formule des probabilités totales, seuls les termes pour lesquels $n \geqslant k$ seront non nuls

$$\mathrm{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{P}_{(N=n)}(X=k)\,\mathrm{P}(N=n)$$

ce qui donne en remplaçant :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\frac{1}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n\\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\left(\frac{16}{25}\right)\right)^{k+1}} = \frac{1}{4^k}\times\frac{16^k}{9^k}\times\frac{25}{9}\frac{1}{4}\\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^k\frac{25}{36}\end{aligned}$$

(e) La série $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$ est à termes positifs donc sa convergence absolue est équivalente à sa convergence, et on reconnaît une série géométrique dérivée avec $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$ donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty}k\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}k\mathrm{P}(X=k) + 0 = \sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{4}{9}\right)^k\frac{25}{36}\\ &= \frac{25}{36}\times\frac{4}{9}\sum_{k=0}^{+\infty}k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{25}{9^2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{25}{9^2}\times\frac{9^2}{5^2} = 1.\end{aligned}$$

(f) On a pour $k \geqslant 1$ (pour pouvoir mettre à part le terme pour $k = 0$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leqslant k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(X = i) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{4}{9}\right)^i \frac{25}{36} = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^i - 1\right) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1}{\frac{4}{9} - 1} - 1\right) = \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - 1 + \frac{5}{9}}{-\frac{5}{9}} \\
&= \frac{4}{9} - \frac{5}{4}\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1} - \frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k
\end{aligned}$$

et le résultat est aussi vrai pour $k = 0$ où $\mathrm{P}(X \leqslant 0) = 4/9$.

(g) **Informatique**

```
function x=simulX()
    n=grand(1,1,'geom',1/5)
    x=grand(1,1,'bin',n,1/5)
endfunction
```

3. **étude d'une variable à densité**

(a) F est la fonction de répartition d'une variable à densité si :

- $F \to 0$ en $-\infty$ et $F \to 1$ en $+\infty$.
- F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.
- F est croissante sur $\mathbb{R}$.

ce que l'on vérifie :

- Pour $x < a$ on a
$$F(x) = 0 \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$
et pour $x > a$ on a
$$F(x) = 1 - e^{x \ln \frac{4}{9}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$
car $\ln(4/9) < 0$ (car $4/9 < 1$).

- F est continue sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions continues.

  Il reste à montrer la continuité en a^- en revenant à la définition : en a^- on a
$$F(x) = 0 \xrightarrow[x \to a^-]{} 0$$
et
$$F(a) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^a = 1 - \frac{5}{9}e^{a \ln \frac{4}{9}}$$
avec
$$a \ln \frac{4}{9} = -\frac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4} \ln \frac{4}{9} = -\frac{\ln(9/5)}{\ln(9/4)}\left[-\ln(9/4)\right] = \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$
donc
$$F(a) = 1 - \frac{5}{9}\frac{9}{5} = 0$$
Donc
$$F(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} F(a)$$
et F est continue à gauche de a donc continue sur $\mathbb{R}$.

  Enfin elle est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sur $]-\infty, a[$ comme composée de fonctions C^1.

- Enfin
$$F'(x) = 0 \quad \text{sur }]-\infty, a[$$
et
$$F'(x) = -\frac{5}{9} e^{x \ln(4/9)} \ln\left(\frac{4}{9}\right) > 0 \quad \text{sur }]a, +\infty[$$
car $\ln(4/9) < 0$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc F est bien une fonction de répartition de variable à densité.

(b) Une densité de Y est alors obtenue en dérivant en tout point où elle est dérivable, et en donnant une valeur arbitraire ailleurs, ce qui donne :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{5}{9} \ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{x \ln(4/9)} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

(c) On sait qu'une primitive de g est $G(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x te^{t \ln(\frac{4}{9})} dt$.

On ne sait pas primitiver directement donc on procède par intégration par partie :

On pose $u(x) = \frac{e^{x \ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})}$ et $v(x) = x$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par I.P.P :
$$\int_0^x te^{t \ln(\frac{4}{9})} dt = [v(t)u(t)]_0^x - \int_0^x v'(t)u(t)dt = x\frac{e^{x \ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \int_0^x \frac{e^{t \ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} dt = x\frac{e^{x \ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \left[\frac{e^{t \ln(\frac{4}{9})}}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2}\right]_0^x$$
Ainsi,
$$G(x) = x\frac{e^{x \ln(\frac{4}{9})}}{\ln(\frac{4}{9})} - \frac{e^{x \ln(\frac{4}{9})}}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2} + \frac{1}{\left(\ln(\frac{4}{9})\right)^2}$$

(d) Par relation de Chasles, sous réserve de convergence,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{-\infty}^{a} 0\ dt + \frac{5}{9}\int_a^{+\infty} t \ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{-t \ln(9/4)}\ dt$$

- $\int_{-\infty}^a 0\ dt$ converge absolument et vaut 0.

- Pour la deuxième intégrale, on reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle (où l'intégrale part de a au lieu de 0), donc cette intégrale converge, et c'est l'intégrale d'une fonction positive donc elle converge absolument.

- Enfin Y admet une espérance et on a :
$$E(Y) = \frac{5}{9}\int_a^{+\infty} t \ln\left(\frac{9}{4}\right) e^{t \ln(4/9)}\ dt$$
qu'on calcule à l'aide de la primitive G de g, en se ramenant sur un segment :
$$\begin{aligned} \int_a^M tf(t)\,dt &= = \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\int_a^M g(t)\,dt = \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)[G(t)]_a^M \\ &= \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\left[\frac{Me^{M \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} - \frac{e^{M \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2} - \frac{ae^{a \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} + \frac{e^{a \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2}\right] \\ &\xrightarrow[M \to +\infty]{} \frac{5}{9}\ln\left(\frac{9}{4}\right)\left[-\frac{ae^{a \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} + \frac{e^{a \ln(4/9)}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)^2}\right] \end{aligned}$$
avec
$$a \ln\left(\frac{4}{9}\right) = \ln\left(\frac{9}{5}\right) \quad \text{et} \quad e^{a \ln(4/9)} = \frac{9}{5}$$

ce qui donne enfin :

$$E(Y) = \frac{5}{9} \times \frac{-a \times \frac{9}{5}\ln\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{9}{5}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{1 - \ln(9/5)}{\ln(4/9)}$$

(e) **La méthode d'inversion :**

i. • F est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]a;+\infty[$ en tant que fonctions de répartition d'une variable aléatoire à densité.
• F est dérivable et $F' = f > 0$ sur $]a;+\infty[$ donc F est strictement croissante sur $]a;+\infty[$. Ainsi F réalise une bijection de $]a;+\infty[$ dans $]\lim\limits_{x\to a} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[$.
Or on a $\lim\limits_{x\to a} F(x) = F(a) = 0$ (car F continue en tout point en tant que fonction de répartition d'une variable à densité) et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ par propriété des fonctions de répartition. D'où le résultats de la question.
Soit $y \in]0;1[$, résolvons l'équation $y = F(x)$ d'inconnue $x \in]a;+\infty[$:
$y = 1 - e^{x\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \Leftrightarrow e^{x\ln\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{9}{5}(1-y) \Leftrightarrow x\ln\left(\frac{4}{9}\right) = \ln\left(\frac{9}{5}(1-y)\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{9}{5}(1-y)\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$ Ainsi,

$$\forall y \in]0;1[, \qquad G(y) = \frac{\ln\left(\frac{9}{5}(1-y)\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$$

ii.
```
function y=G(x)
    y=log(9/5*(1-x))/log(4/9)
endfunction

u=rand()
y=G(u)
disp(y)
```

Exercice 2. : ecricome 2010
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$.

1. $\ln x$ a pour limite $-\infty$, $\ln(x+1)$ a pour limite 0 et $\frac{1}{x}$ a pour limite $+\infty$, c'est une forme indéterminée.

   Comme $\frac{1}{x}$ est prépondérant, on factorise par celui-ci :

   $$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(1 + x\ln x + x\ln(x+1)\right)$$

   et $x\ln x \to 0$ par croissances comparées donc par produit de limites :

   $$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

   On en déduit que la droite $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de φ.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, il reste à traiter les deux ln qui donnent une forme indéterminée :

   Ici par de terme prépondérant évident, on commence en fait à l'intérieur du second ln :

   $$\varphi(x) = \ln(x) - \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{1}{x} = \ln x - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

   On pouvait aussi rassembler les deux ln en un seul puis simplifier (en sortant de la méthode habituelle pour un calcul plus astucieux).

   On en déduit que la droite $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de φ en $+\infty$.

3. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions usuelles de classe C^1, et :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x+1 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	‖
$\varphi(x)$	‖	$+\infty$ ↘ 0	‖

5. φ est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\varphi(\ ]0;+\infty[\ ) =]0;+\infty[$.
De plus $1 \in \varphi(\ ]0;+\infty[\ )$ donc l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

On a de plus

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 - (\ln(4) - \ln(3)) + 3 = 3 - 2\ln 2 > 1 \quad \text{et}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) + 2 = 2 - \ln 3 < 1$$

On obtient alors par stricte décroissance de φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

6. On ne dispose pas de suite approchant α, donc on procède par dichotomie :

```
function y=f(x)
   y=log(x)-log(x+1)+1/x-1
endfunction
a=1/3 , b=1/2
while abs(b-a)>10^(-2) do
   c=(a+b)/2
   if f(c)<0 then
      b=c
   else
       a=c
   end
end
disp(string(a)+'<alpha<'+string(b))
```

II. Une variable à densité.

Soit α le réel défini à la question **I.5.** On considère la variable aléatoire réelle X dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$$

1. f est positive sur $]\alpha;+\infty[$ car $x+1>0$ sur $]\alpha;+\infty[$, et sur $]-\infty;\alpha]$ car $0 \geqslant 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

   f est continue sur $]\alpha;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et sur $]-\infty;\alpha]$ car $x \mapsto 0$ est continue, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en α.

   Enfin sous réserve de convergence et par relation de Chasles on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} [-\varphi'(t)]\ dt$$

   Or $\int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt$ converge et vaut 0, étudions la seconde.
   Comme on cherche la convergence et la valeur, on passe par l'intégrale partielle :

$$\int_{\alpha}^{x} [-\varphi'(t)]\ dt = [-\varphi(t)]_{\alpha}^{x} = -\varphi(x) + \varphi(\alpha) = -\varphi(x) + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -0+1 = 1$$

   donc $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\ dt$ et par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ convergent et valent 1, et f est bien une densité de probabilité.

2. Sous réserve de convergence absolue et par relation de Chasles,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\ dt$$

   Or $\int_{-\infty}^{\alpha} 0\ dt$ converge absolument et vaut 0, étudions la seconde.
   Comme on ne cherche que la convergence et pas la valeur, on passe par un théorème de comparaison :

   Cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et

$$\frac{1}{t(t+1)} \sim \frac{1}{t^2} \qquad \text{en } +\infty$$

   et $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2>1$, donc l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\ dt$ converge par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

   Comme on intègre une fonction positive, cette intégrale converge absolument, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge absolument et X admet bien une espérance.

3. Pour $x>\alpha$, on a

$$xf(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

   et

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(x+1)} + \frac{x+1}{x^2(x+1)} = \frac{x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = f(x)$$

   On en déduit que

$$E(X) = \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi'(t)\ dt + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\left[\varphi(t) - \frac{1}{t} \right]_{\alpha}^{x} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} - \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \right)$$

   et enfin

$$E(X) = -1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

   On a de plus par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$0 < \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad 2 < \frac{1}{\alpha} < 3 \quad \text{donc } 1 < -1 + \frac{1}{\alpha} < 2$$

   et enfin :

$$1 < E(X) < 2$$

4. On s'intéresse au moment d'ordre 2 : par théorème de transfert et en éliminant l'intégrale nulle de $-\infty$ à α, on a sous réserve de convergence absolue :

$$E(X^2) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt$$

On demande uniquement la convergence, on passe par un théorème de comparaison et on commence par chercher un équivalent simple de la fonction à intégrer (qui est bien positive) :

$$\frac{1}{t+1} = \frac{1}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} \sim \frac{1}{t} \quad \text{en } +\infty$$

Or $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge comme intégrale de Riemann de paramètre 1, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt$ diverge donc X n'admet pas de moment d'ordre 2 donc pas de variance.

Exercice 3. : EML 2012
On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $B - \lambda I$, et on cherche les valeurs de λ pour laquelle elle n'est pas inversible, en effecutant les opérations de pivots suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad , \quad L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1$$

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 2-\lambda & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec $P(\lambda) = 2 - (2-\lambda)(3-\lambda) = 2 - (6 + \lambda^2 - 5\lambda) = -\lambda^2 + 5\lambda - 4$.

Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

Or le discriminant de P vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 25 - 16 = 9$, et les racines de l'équation sont $\lambda_1 = \frac{-5-3}{-2} = 4$ et $\frac{-5+3}{-2} = 1$.

On en déduit que $\mathrm{Sp}(B) = \{1; 4\}$ est de cardinal 2 et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc B est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1. Calculons-les :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(B) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = -2y \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_4(B) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}\right]$ (an anticipe la question 2) et $E_4(B) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Remarquons qu'on demande ici les sous-espaces propres de B donc on doit a priori laisser les vecteurs en colonnes (on repasserait en ligne pour les sous-espaces propres de l'application linéaire associée).

2. B est diagonalisable ; de plus en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, P est constituée d'une base de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres 1 et 4 donc P est inversible et en posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ on a $B = PDP^{-1}$.

3. Comme D est diagonale, on a $D^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ et $5D - 4I = \begin{pmatrix} 5-4 & 0 \\ 0 & 20-4 \end{pmatrix} = D^2$.

   On a alors, comme B et D sont semblables, $B^2 = PD^2P^{-1} = P(5D-4I)P^{-1} = 5PDP^{-1} - 4PIP^{-1} = 5B - 4I$.

4. $B^2 = 5B - 4I$ donc $I = -\frac{1}{4}(B^2 - 5B) = -\frac{1}{4}(B - 5I)B$.

   D'où B est inversible et $B^{-1} = -\frac{1}{4}(B - 5I)$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. h est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (produit de matrice 2x2).

   Etudions la linéarité : pour tout M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α réel on a :

   $$h(M + \alpha N) = A(M + \alpha N)B = AMB + \alpha ANB = h(M) + \alpha h(N)$$

   D'où h est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Les angles d'attaque ici sont multiples pour la bijection ($\ker(h)$, matrice associée, 0 valeur propre...). Mais pour obtenir h^{-1}, il faut fixer $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et résoudre l'équation $h(M) = N$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   Pour tout M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

   $$h(M) = N \iff AMB = N \iff A^{-1}(AMB)B^{-1} = A^{-1}(N)B^{-1} \iff M = A^{-1}NB^{-1}$$

   car A et B sont inversibles (A est triangulaire sans terme nul sur la diagonale, et B n'admet pas 0 pour valeur propre) donc admettent des inverses notés A^{-1} et B^{-1}.

   D'où h est bijective et pour tout $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $h^{-1}(N) = A^{-1}NB^{-1}$.

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

   (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = MP$, on a donc $M = NP^{-1}$ et :

   $$h(M) = \lambda M \iff AMB = \lambda M \iff ANP^{-1}B = \lambda NP^{-1} \iff ANP^{-1}BP = \lambda N \iff AND = \lambda N$$

   (b) Soit $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on a :

   $$AND = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 4y \\ -z & -4t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda N = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$$

   Donc

   $$AND = \lambda N \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ 4y = \lambda y \\ -z = \lambda z \\ -4t = \lambda t \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (4-\lambda)y = 0 \\ (-1-\lambda)z = 0 \\ (-4-\lambda)t = 0 \end{cases}$$

   On obtient un système triangulaire, qui admet des solutions non nulles si et seulement si il y a au moins un 0 sur la diagonale. Donc il existe une matrice N non nulle si et seulement si $\lambda = 1$, -1, 4 ou -4.

(c) Donc, avec $M = NP$, $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$ aura des solutions non nulle sous les même conditions.

D'où $\operatorname{Sp} h = \{-1; 1; -4; 4\}$, et comme l'espace de départ et d'arrivée $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, l'endomorphisme h qui possède 4 valeurs propres distinctes est donc diagonalisable.

Dans une base de vecteurs propres (associées dans cet ordre) de h, sa matrice sera

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(d) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la base de vecteurs propres précédente, la matrice de e est I (c'est vrai dans toute base) donc celle de $(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e)$ est $(\Delta - I)(\Delta + I)(\Delta - 4I)(\Delta + 4I)$ qui vaut 0 après calcul.

Donc $(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e) = 0$ car il admet une matrice nulle.

Exercice supplémentaire

Exercice 4. : Edhec 2014

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, avec $t^2+1 \geqslant 1 \geqslant 0$ donc la racine existe bien, et $\sqrt{t^2+1} \geqslant \sqrt{1} = 1 > 0$ donc l'inverse existe bien.

   On en déduit que pour tout x, la fonction est continue sur le segment $[x; 2x]$ ou $[2x; x]$ et l'intégrale est bien définie.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrons que $f(-x) = -f(x)$:

   On applique le changement de variable $u = -t \iff t = -u$ à l'intégrale $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$:

   - Quand $t = -x$, $u = x$. Quand $t = -2x$, $u = 2x$.
   - $dt = -du$.

   On en déduit que :

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} \times (-1)\, du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\, du = -f(x)$$

   car les variables t et u sont muettes. La fonction f est donc impaire.

3. (a) On a vu que la fonction intégrée, qu'on va noter g, est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}$, qui est alors de classe C^1. On peut alors expliciter :

$$f(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$$

   qui est de classe C^1 comme somme et composée de fonctions de classe C^1.

(b) Toujours avec cette nouvelle expression, on obtient : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{(4x^2+1)(x^2+1)}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, on s'intéresse au numérateur :

$$2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{4x^2+4} - \sqrt{4x^2+1} > 0$$

car $4 > 1$ donc $4x^2 + 4 > 4x^2 + 1$, et enfin la racine carrée étant strictement croissante, $\sqrt{4x^2+4} > \sqrt{4x^2+1}$.

On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et enfin que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. (a) On passe l'encadrement donné par l'énoncé, qui ne concerne que des nombre strictement positifs puisque $t \geqslant x > 0$, à la racine carrée strictement croissante (avec t et $t+1$ strictement positifs pour la valeur absolue) puis à l'inverse strictement décroissante (tous les nombres sont strictement positifs), puis on intègre avec des bornes rangées dans l'ordre croissant ($x > 0$ donc $x + x = 2x > x$), on obtient :

$$|t| = t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant |t+1| = t+1 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{t+1} \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t} \quad \text{et enfin} \quad \int_x^{2x} \frac{1}{t+1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}.$$

On calcule ces deux intégrales :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\, dt = [\ln|t+1|]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

et

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2 + \ln x - \ln x = \ln 2.$$

On en déduit finalement que :

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln 2.$$

(b) Le terme de droite de l'encadrement converge trivialement vers $\ln 2$, étudions celui de gauche :

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) - \ln(x+1) &= \ln\left[2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right] - \ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln(2x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Par composée de limites, cette quantité converge vers $\ln 2$ lorsque x tend vers $+\infty$, et finalement par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2.$$

(c) f est impaire donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\ln 2$, et finalement :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln 2$ ↗	$\ln 2$

(d) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\ln 2; \ln 2[$ donc bijective et 0 admet un unique antécédent car il est dans l'intervalle d'arrivée.

De plus f est impaire donc $f(0) = 0$, et cette unique solution est donc 0.

5. (a) On va isoler la racine pour la supprimer :

$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x.$$

Attention ici : la fonction carrée change de variations, on ne peut composer l'inégalité que si les deux quantités sont de même signe!!!

- Premier cas : $x \leqslant 0$. Alors $-x \geqslant 0$, et en composant par le carré strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$:

$$x+\sqrt{x^2+1}>0 \Longleftrightarrow x^2+1>(-x)^2 \Longleftrightarrow 1>0$$

qui est bien vrai, donc l'inégalité de départ est vraie.

- Deuxième cas : $x>0$. Alors $-x<0$ et on ne peut pas composer (les termes sont de signes opposés). Mais on a alors de manière évidente :

$$-x<0<\sqrt{x^2+1}$$

donc l'inégalité est bien vérifiée, et celle de départ également.

Finalement on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x+\sqrt{x^2+1}>0.$$

(b) La fonction h est dérivable comme composée de fonction dérivables, avec $x^2+1 \geqslant 1>0$ pour la racine carrée, et $x+\sqrt{x^2+1}>0$ pour le logarithme. On peut alors calculer :

$$h'(x)=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\times\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=g(x).$$

(c) h est donc une primitive de g, on peut alors calculer :

$$f(x)=[h(t)]_x^{2x}=h(2x)-f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

(a) f et le terme de droite étant sous forme d'une intégrale de x à $2x$, il faut écrire x de la même manière. On remarque que :

$$x=\int_x^{2x} 1\ dt.$$

On peut alors calculer par linéarité de l'intégrale :

$$x-f(x)=\int_x^{2x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)\ dt=\int_x^{2x}\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}\ dt.$$

Pour éliminer la racine du numérateur, on multiplie par la quantité conjuguée (si on ne connaît pas cette astuce, on peut s'aider du résultat à obtenir : il faut visiblement multiplier le dénominateur par $(1+\sqrt{t^2+1})$, donc le numérateur aussi). On reconnaît alors une identité remarquable :

$$\begin{aligned} x-f(x) &= \int_x^{2x}\frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\times\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\ dt=\int_x^{2x}\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\ dt \\ &= \int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\ dt. \end{aligned}$$

(b) La fonction sous l'intégrale est positive et pour $x>0$, les bornes sont rangées dans l'ordre croissant : on en déduit que pour tout $x>0$,

$$x-f(x) \geqslant 0.$$

Enfin on peut remarquer que le dénominateur est le produit de deux facteurs, l'un supérieur à 1 (le premier), le second supérieur à 2, donc par produit, il est supérieur à 2. On compose par l'inverse strictement décroissante (2 et le dénominateur sont de même signe) puis on multiplie par $t^2 \geqslant 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

On intègre enfin avec des bornes dans l'ordre croissant ($x > 0$) :

$$x - f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\, dt = \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x} = \frac{(2x)^3 - x^3}{6} = \frac{8x^3 - x^3}{6} = \frac{7x^3}{6}.$$

Finalement on obtient l'encadrement demandé :

$$\forall x > 0, 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3.$$

(c) Cherchons alors la limite de $\frac{f(x)}{x}$, en encadrant cette quantité : on isole d'abord $f(x)$ puis on divise par $x > 0$:

$$-x \leqslant -f(x) \leqslant -x + \frac{7}{6}x^3 \quad , \quad x - \frac{7}{6}x^3 \leqslant f(x) \leqslant x \quad , \quad 1 - \frac{7}{6}x^2 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1.$$

Les terme de gauche et de droite de l'encadrement convergent vers 1 lorsque $x \to 0^+$, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{0^+}{\sim} x.$$

(d) Première méthode : par imparité, au voisinage de 0^-, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f[-(-x)]}{x} = \frac{-f(-x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$$

car $-x$ est au voisinage de 0^+, on peut donc utiliser l'équivalent de la question précédente.

Deuxième méthode : on reprend l'expression de $x - f(x)$ qui était valable sur $\mathbb{R}$:

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$$

L'encadrement de la fonction à l'intérieur est toujours vrai (tous les arguments précédents sont encore valables), on peut donc écrire :

$$0 \leqslant \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

Cette fois on intègre l'encadrement avec des bornes dans l'ordre décroissant ($x < 0$ donc $x + x = 2x < x$) :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\, dt \leqslant x - f(x) \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad \frac{7}{6}x^3 \leqslant x - f(x) \leqslant 0.$$

(le calcul de l'intégrale de $t^2/2$ reste valable pour $x < 0$). On encadre alors $f(x)/x$:

$$\frac{7}{6}x^3 - x \leqslant -f(x) \leqslant -x \quad \text{donc} \quad 1 - \frac{7}{6}x^2 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

De nouveau les deux côtés de l'encadrement convergent vers 1 (cette fois en 0^-), donc la quantité $\frac{f(x)}{x}$ également par théorème d'encadrement, et enfin :

$$f(x) \underset{0^-}{\sim} x.$$