Devoir maison n° 10

A rendre le Mardi 4 Février 2020

Exercice 1. : chap 9

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0 = \int\limits_0^1 \frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln 2$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Exercice 2. : chap 8

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.
   Remarque : cette question est abstraite puisque l'on ne connait pas l'expression de f, f étant quelconque. Il faut donc revenir à la définition des endomorphismes diagonalisables.

   On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
   Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
   On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
   (b) Donner une base (u) de $\ker(g - Id)$.
   (c) Déterminer $\ker(g + Id)$.
   (d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
3. (a) Résoudre l'équation , $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base $(v; w)$ de $\ker(g^2 + Id)$.
   (b) Montrer que la famille $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$ et conclure.

Exercice 3. : chap 10

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| \text{ si } x \in [-1;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   (a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

   (b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

   On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et admettant f comme densité

2. (a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

   (b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

   On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

   (b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

   (c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0;1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
   On pose $I = Inf(U,V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \mathrm{Min}(\ U(\omega), V(\omega)\ )$.
   On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathrm{P}(I > x) = \mathrm{P}(\ [U > x] \cap [V > x]\ )$.
   Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

   (a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

   (b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6. **Informatique :** On rappelle que, si `a` et `b` sont deux vecteurs lignes de taille n, les commandes `m=min(a,b)` et `M=max(a,b)` renvoient les vecteurs `m` et `M`, de même taille que `a` et `b`, et tels que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on ait : `m(i)=min(a(i),b(i))` et `M(i)=max(a(i),b(i))`.

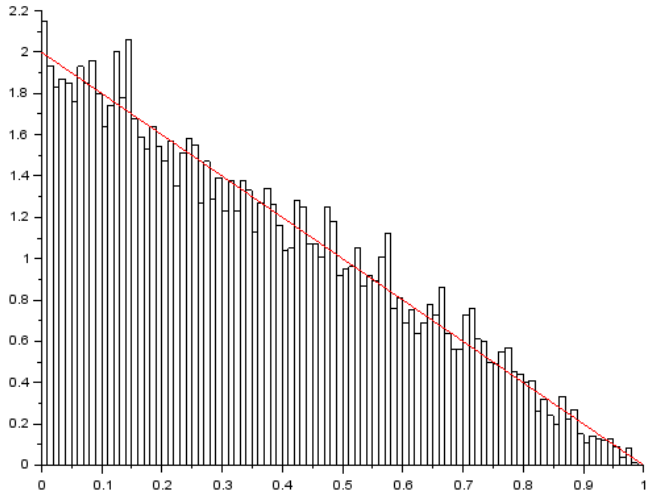
   (a) Justifier que les commandes `rand(1,1000)` et `grand(1,1000,'unf',0,1)` ont la même fonction en `Scilab`.

   (b) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles effectuent 1000 simulations de variables suivant la loi de Y et les mémorise dans un vecteur ligne `y`, puis trace l'histogramme de ces 1000 simulations, sur les classes $[0;0,01]$, $[0,01;0,02]$, ...$[0,99;1]$.
   Que trace-t-on en plus grâce à la dernière instruction ?

```
u=rand(1,10000)
v=grand(1,1000,'unf',0,1)
y=***********
```

```
x=**********
histplot(x,y)
plot(x,2*(1-x),color='red')
```

(c) Après exécution, on obtient le graphique suivant :

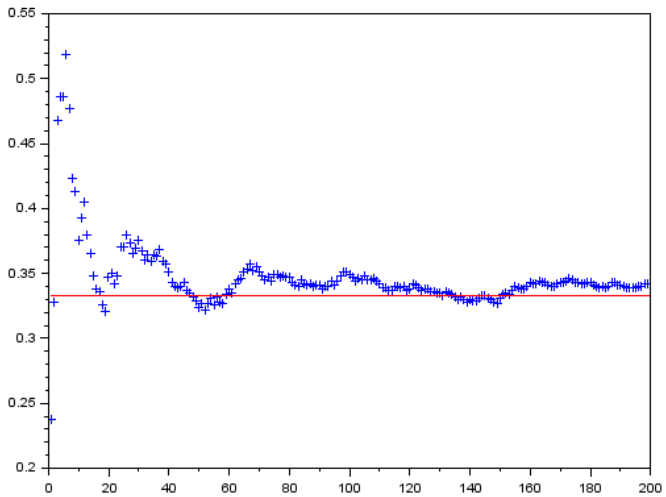


Commenter.

(d) On ajoute les instructions suivantes :

```
plot(cumsum(y(1:200))./[1:200],'+')
plot(1/3*ones(1,200), color='red')
```

Après exécution, on obtient le nouveau graphique :



Expliquer ce qui est tracé en bleu, ce qui est tracé en rouge. Commenter le graphique.

7. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $I_n = Inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de I_n, montrer que I_n est une variable à densité et déterminer une densité de I_n.

Exercice supplémentaire

Exercice 4. : chap 9

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.

   On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.
4. Déterminer un réel positif α tel que $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

   On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)dt$.

   (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

   (b) Montrer : $\forall (u, v) \in ([0, +\infty[)^2,\ \ u < v \Longrightarrow \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \displaystyle\int_{x+u}^{x+v} f(t)dt$.

   En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

   (c) On admet que φ_x est continue sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$.

   On note $U : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\displaystyle\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
6. (a) Vérifier, pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$: $U(x) = 1 - x$.

   (b) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, montrer : $\varphi_x(x) \geq \dfrac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geq 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.
7. (a) Montrer que l'application U est continue sur $[0; +\infty[$.

   (b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0; +\infty[$

   (c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.
8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{cases}$

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\dfrac{1}{2}$.

   (d) Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant 10^{-6}$$