Indications du devoir maison n° 10

Exercice 1.

1. Pour prouver qu'une intégrale existe :
   - On justifie proprement que la fonction intégrée est continue entre les bornes.
   - On vérifie si elle est généralisée ou pas : si elle n'est pas généralisée, c'est terminé. Sinon, on justifie la convergence de l'intégrale .

2. Ne pas oublier le u' dans les formules de primitives.

3. (a) Très classique : la suite n'étant pas récurrente, la seule méthode est le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   Pour chercher le signe d'une intégrale, on rassemble en une seule intégrale avec la linéarité et on cherche le signe à l'intérieur pour intégrer avec les bornes dans l'ordre croissant ou décroissant.

   Pour chercher le signe d'une expression, on la factorise au maximum (factorisations réelles) et on cherche le signe de chaque facteur pour conclure avec un tableau de signe. Pour étudier un facteur problématique, on pose une fonction et on commence par étudier ses variations pour en déduire son signe.

   (b) Commencer par majorer sous l'intégrale (en gardant le terme qui dépend de n !) avant d'intégrer l'inégalité avec les bornes dans l'ordre croissant (ou bien minorer sous l'intégrale puis intégrer avec des bornes décroissantes).
   On veillera à majorer la fonction par une fonction qui donnera le logarithme souhaité quand on la primitivera !

   (c) Evident.

4. (a) Penser à la question 3)b), où on a calculé une intégrale qui a donné $\ln(2)$.

   (b) Commencer par majorer sous l'intégrale avant d'intégrer l'inégalité.

   (c) Attention à bien obtenir un **encadrement** de u_n (les limites de suite ou fonction définies avec des intégrales s'obtiennent toujours par encadrement).

5. (a) Justifier en quelle(s) borne(s) elle est généralisée et séparer en deux intégrales si les deux bornes le sont. Ensuite, pour une convergence sans la valeur, on utilise un théorème de comparaison. On cherche alors dans l'ordre :
   - Une comparaison donnée par l'énoncé précédemment.
   - Un équivalent (en la borne où on est généralisée, et en pensant à factoriser les sommes par leurs termes prépondérants ; en un point autre que 0 ou $\pm\infty$, penser à se ramener en 0 par un changement de variable.
   - Une négligeabilité, en priorité devant $\frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$ et devant $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ en 0.
   - Une inégalité à trouver soi-même.

   (b) Commencer à encadrer sous l'intégrale, puis intégrer l'inégalité.

   (c) Evident.

Exercice 2.

1. - Quelle est la définition d'un endomorphisme diagonalisable ?
   - Pour prouver quelque chose sur un endomorphisme, il faut toujours essayer de le prouver sur une matrice associée. Reste alors à trouver une matrice associée à f^2, en commençant par une matrice associée à f (puisque c'est le seul sur lequel on a une information).

2. (a) Pour la résolution d'une équation de degré "trop grand", penser à regarder si elle est du deuxième degré en une autre variable. Sinon, on peut étudier une fonction pour obtenir le nombre de solutions et chercher les solutions évidentes. Enfin on peut aussi trouver ces solutions évidentes puis factoriser par $(x - \alpha)$ pour chaque solution α jusqu'à faire apparaître du degré 2.

   (b) Attention à conclure sur A puis sur g !

   (c) Idem.

   (d) Pour prouver qu'un endomorphisme **n'est pas** diagonalisable, seule la somme des dimensions des sous-espaces propres peut s'appliquer. Déterminer alors proprement toutes les valeurs propres puis la dimension (donc une base, donc une famille génératrice et libre) de chaque sous-espace propre.

3. (a) - Evident. Pour une base, il faut une famille dont on justifie qu'elle est génératrice et libre, ou bien qu'elle a le bon nombre de vecteurs et est libre.
   - Une famille est génératrice de E si E s'écrit Vect (....).
   - Pour prouver qu'une famille est libre, on utilise un des deux cas particuliers (un ou deux vecteurs) ou bien on revient à la définition avec la résolution d'une équation à partir de 3 vecteurs.

   (b) Récupérer (u) à la question 2b, puis la méthode pour obtenir une base est donnée en 3a.

   (c) Il suffit de connaître la définition d'une matrice dans une certaine base et d'un vecteur propre de g ou g^2. Enfin on veut conclure à la diagonalisabilité de g^2, on commence par essayer d'utiliser une matrice associée si on en a une...

Exercice 3.

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } x \in [-1;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   (a) Pour calculer l'intégrale d'une fonction qui a plusieurs expressions, on sépare avec Chasles l'intégrale en autant de parties que nécessaire pour n'avoir qu'une seule expression de la fonction à chaque fois.
   On ne connaît aucune primitive avec la valeur absolue : pour calculer une intégrale avec la valeur absolue, on doit réécrire son expression avec deux cas et séparer l'intégrale comme expliqué ci-dessus.
   Pour obtenir la valeur d'une intégrale sans calcul, il n'y a que deux moyens : soit on reconnaît une intégrale usuelle (espérance ou moment d'ordre deux d'une loi usuelle à densité), soit on utilise la parité ou l'imparité.
   Pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire, on justifie toujours que son intervalle de définition est centré en 0 ; ensuite on prouve que $f(-x) = f(x)$ ou $-f(x)$, en faisant autant de cas qu'il y en a dans la fonction !

(b) Définition à connaître parfaitement : on prouve, avec autant de cas que dans la définition de f, la continuité sauf peut-être en un nombre fini de points (qu'on explicite s'il y en a, mais où on ne cherche pas à savoir si f est continue) et la positivité sur $\mathbb{R}$.
On prouve qu'une certaine intégrale généralisée converge : pour cela on la sépare en autant de parties que nécessaire pour pouvoir remplacer f par son expression dans chaque cas. Ensuite on prouve que chacun des intégrales écrites converge, avec plusieurs cas à considérer :

- Si c'est l'intégrale de la fonction nulle, on conclut directement à la convergence et à une valeur nulle.
- Si l'intégrale n'est pas généralisée, on conclut directement à la convergence.
- Si on reconnaît une intégrale usuelle, on conclut directement à la convergence et à sa valeur.
- Si on n'est dans aucun des cas précédents, on revient à l'intégrale partielle, qu'on calcule pour obtenir sa limite et conclure ensuite à la convergence et à sa valeur.

Enfin on calcule la valeur de l'intégrale : selon les 4 cas précédents pour obtenir la convergence, seul le cas d'une intégrale non généralisée nécessite encore de calculer l'intégrale. On n'oublie pas de vérifier si le calcul n'a pas déjà été fait précédemment...

2. Définition à connaître parfaitement : on prouve qu'une certaine intégrale généralisée converge **absolument** : pour cela on la sépare en autant de parties que nécessaire pour pouvoir remplacer f par son expression dans chaque cas. Ensuite on prouve que chacun des intégrales écrites converge **absolument**, avec plusieurs cas à considérer :

   - Si c'est l'intégrale de la fonction nulle, on conclut directement à la convergence **absolue** et à une valeur nulle.
   - Si l'intégrale n'est pas généralisée, on conclut directement à la convergence **absolue**.
   - Si on reconnaît une intégrale usuelle, on conclut directement à la convergence **absolue** et à sa valeur.
   - Si on n'est dans aucun des cas précédents, on justifie que la convergence absolue est équivalente à la convergence car la fonction ne change pas de signe. Ensuite on revient à l'intégrale partielle, qu'on calcule pour obtenir sa limite et conclure ensuite à la convergence, donc la convergence **absolue** et à sa valeur.

   Enfin on calcule la valeur de l'intégrale : selon les 4 cas précédents pour obtenir la convergence absolue, seul le cas d'une intégrale non généralisée nécessite encore de calculer l'intégrale. On n'oublie pas de vérifier si le calcul n'a pas déjà été fait précédemment...

3. L'indication de méthode est donnée dans le sujet. Attention, il faut ensuite séparer l'intégrale en autant de parties que nécessaires (et le nombre de parties nécessaires change selon la valeur de x). Dans un calcul de fonction de répartition, toutes les convergences ont déjà été prouvées lors de la justification que f est une densité : il n'y a donc aucune justification de convergence d'intégrale nécessaire.

4. (a) Pour trouver la fonction de répartition d'une nouvelle variable aléatoire définie à l'aide des autres, on revient à la définition par une probabilité, et on se ramène à ce qu'on connaît : X.
   Pour déterminer les probabilités sur X : on vérifie d'abord si l'évènement est certain ou impossible, et si c'est le cas, on conclut immédiatement. Dans le cas contraire :

   - S'il dépend d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction de répartition, on transforme l'évènement jusqu'à arriver à une égalité ou un encadrement de celle-ci, et on conclut par les calculs de probabilités classiques.

   - S'il dépend de deux variables aléatoires connues, il faut utiliser la formule des probabilités totales avec le sce de l'une des deux variables (qui doit forcément être discrète!). On se ramène ensuite à une expression avec des sommes et des produits de probabilités d'évènements plus simples dont chacun ne dépend que d'une seule variable, et on applique le point précédent sur chacune de ces probabilités.

(b) L'égalité d'évènements est évidente et seulement rappelée pour aider à la résolution. Ensuite, voir l'indication de la méthode précédente.

(c) Pour obtenir la densité d'une variable aléatoire, il faut connaître sa fonction de répartition. Ensuite :

- On s'assure que la variable est à densité. Parfois l'énoncé l'admet (toujours vérifier si c'est le cas), sinon on le prouve avec les bonnes propriétés sur la fonction de répartition : classe C^1 sauf peut-être en un nombre fini de points et continuité sur $\mathbb{R}$ (il faut donc vérifier la continuité aussi aux points problématiques).
- Par calculer une densité, on précise toujours qu'on dérive la fonction de répartition **sauf aux points problématiques où on donne une valeur arbitraire**. Ensuite on dérive pour obtenir une densité.

(d) Voir méthode ci-dessus (question 2).

5. (a) La loi de l'inf/min/durée de vie d'un système en série, comme celle du sup/max/durée de vie d'un système en parallèle est un très grand classique des concours. Après une égalité d'évènements parfois rappelée par l'énoncé, il faut savoir proprement (sans se prendre les pieds dans les différents $1-(1-(1-....)$ se ramener aux fonctions de répartitions connues pour calculer celle cherchée.

   (b) Pour justifier que des variables à densité ont la même loi, on peut regarder soit leurs fonctions de répartition, soit leurs densités. Si on veut calculer une densité, la méthode est rappelée en 4c.

6. La question précédente suggère de simuler la variable I (simple à simuler : minimum de deux simulations uniformes) et non la variable Y.

7. Utiliser la méthode générale de calcul de la loi d'un minimum c'est-à-dire, commencer par traduire l'évènement $(I_n > t)$ en fonction des variables X_1, X_2, ..., X_n , en déduire sa probabilité, puis en déduire la fonction de répartition de I_n.

Exercice supplémentaire

Exercice 4.

1. Etudier les variations (très simples) de cette fonction et suivre les informations du tableau. Ne pas oublier les limites en 0 et et $+\infty$ pour la partie de droite.

2.
   - Méthode bien connue : ne pas oublier la continuité sauf en un nombre fini de points et la positivité.
   - Une fois l'intégrale "découpée", ne pas oublier de traiter la partie nulle et, pour le reste, de signaler que les fonctions intégrées sont continues sur un certain intervalle (en faisant attention à la fermeture ou à l'ouverture de l'intervalle aux bornes) et en déduire les valeurs où les intégrales sont généralisées.
   - Pour montrer la convergence et obtenir la valeur d'une intégrale généralisée, on passe par l'intégrale partielle ou par les intégrales usuelles (moments des lois usuelles à densité).

3. La convergence est identique à la question précédente, le calcul de primitive est déjà fait. L'important est de séparer convenablement les cas (donnés ici par l'énoncé) et de découper ensuite convenablement les intégrales. On n'hésitera pas à effectuer la représentation habituelle pour s'aider.

4. On demande de résoudre une équation (car on demande la valeur de α), a priori assez simple.

5. (a) Pas de difficulté.

   (b)
   - Pour prouver une inégalité, on passe tout d'un côté et on calcule un signe.
   - Simplifier ensuite pour essayer d'obtenir une seule intégrale.
   - Le signe d'une intégrale s'obtient en déterminant le signe à l'intérieur et en intégrant l'inégalité avec des bornes croissantes ou décroissantes.
   - Le lien avec la croissance de la fonction est évident, à condition de se rappeler la définition d'une fonction croissante : il faut alors prouver que $\phi_x(v) - \phi_x(u) > 0$(remarquer la ressemblance avec la croissance d'une suite), il reste donc à prouver qu'une intégrale est strictement positive (il suffit de prouver que l'intérieur l'est) et d'utiliser la stricte positivité de l'intégrale).

   (c) On demande de prouver qu'une équation a une unique solution sans la déterminer : la méthode est plus que connue.

6. (a) Comme la solution est unique, il suffit de vérifier que $1-x$ est solution de l'équation $\phi_x(u) = \frac{1}{2}$, donc de calculer $\phi_x(1-x)$.

   (b)
   - Calculer $\phi_x(x)$ ne pose pas de problème, ensuite on passe tout d'un côté et on se ramène à un signe.
   - Comme $U(x)$ est la solution d'une équation, on ne peut pas la comparer directement : il faut l'isoler et composer par ϕ_x pour comparer $U(x)$ à une autre valeur.
   - Une fois ce deuxième résultat obtenu, on peut calculer l'intégrale $\phi_x(U(x))$ car on a la bonne expression de f sur l'intervalle : cela permet d'obtenir une équation "soluble" sur $U(x)$.

7. (a) La fonction est définie avec deux expressions différentes, attention au point de raccordement.

   (b) Idem.

   (c) Recenser toutes les informations sur U sur la courbe (variations, points particuliers, asymptotes, etc...)

8. (a) Une inégalité sur une suite récurrente se prouve par récurrence.

   (b) On étudie le signe de $a_{n+1} - a_n$ avec $a_n \geq \frac{1}{2}$, ce qui revient à étudier le signe de $U(x) - x$ pour $x \geq \frac{1}{2}$.

   (c)
   - La première partie est évidente.
   - Pour déterminer la limite d'une suite récurrente, on passe la relation de récurrence à la limite et on résout l'équation obtenue.

   (d) Programme a priori bien connu, pas de difficulté particulière.