Correction du devoir maison n° 10

Exercice 1. : edhec 2004

1. Pour tout $t \in [0;1]$,
$$1+t+t^n \geqslant 1 > 0$$
ce qui assure la continuité de $t \to \frac{1}{1+t+t^n}$ sur $[0;1]$: l'intégrale est donc bien définie car elle n'est pas généralisée.

2. Par primitivations directes,
$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,dt = \Big[\ln|2+t|\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \quad \text{et} \\ u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln|1+2t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

3. (a) Par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)\,dt = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-(1+t+t^{n+1})}{(1+t+t^{n+1})\times(1+t+t^n)}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})\times(1+t+t^n)}\,dt \end{aligned}$$
Or pour tout $t \in [0;1]$, on a $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc :
$$t^n \geqslant 0 \quad , \quad 1-t \geqslant 0 \quad , \quad 1+t+t^n \geqslant 1 > 0 \quad \text{et} \quad 1+t+t^{n+1} \geqslant 1 > 0$$
donc par produit et quotient de signes, pour tout $t \in [0;1]$,
$$\frac{t^n(1-t)}{(1+t+t^{n+1})\times(1+t+t^n)} \geqslant 0$$
et par positivité de l'intégrale avec des bornes rangées dans l'ordre croissant,
$$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$$
et la suite (u_n) est croissante.

(b) Pour tout $t \geqslant 0$ on a $t^n \geqslant 0$ donc $1+t+t^n \geqslant 1+t > 0$, et par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}.$$
On en déduit en intégrant cette inégalité avec des bornes dans l'ordre croissant que
$$u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \ln 2.$$

(c) (u_n) est croissante majorée donc converge.

4. (a) On se rappelle qu'on a rencontré :
$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$$
donc on peut écrire par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} \ln 2 - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-1-t}{(1+t)\,(1+t+t^n)}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)\,(1+t+t^n)}\,dt. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$1 + t + t^n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 + t \geqslant 1$$

donc par produit d'inégalités avec des termes tous positifs :

$$(1 + t + t^n) \times (1 + t) \geqslant 1$$

puis en passant à l'inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par $t^n \geqslant 0$:

$$\frac{1}{(1 + t + t^n) \times (1 + t)} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{t^n}{(1 + t)\ (1 + t + t^n)} \leqslant t^n$$

qu'on intègre sur $[0; 1]$ avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(c) La question 3.b. donne

$$\ln 2 - u_n \geqslant 0$$

donc on obtient l'encadrement

$$0 \leqslant \ln 2 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

qui donne par encadrement, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln 2 - u_n) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2.$$

5. (a) $t \to \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1; +\infty[$ car $1 + t + t^n \geqslant 1 > 0$ sur cet intervalle.

L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$ et la fonction intégrée est positive.

Comme $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{1 + t + t^n} = \frac{1}{t^n \left(1 + \frac{1}{t^{n-1}} + \frac{1}{t^n}\right)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$$

car $n \geqslant 2$ et $n - 1 \geqslant 1$ donc :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n-1}} = 0.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\ dt$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$, convergente car $n \geqslant 2 > 1$, et est également l'intégrale d'une fonction positive.

Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale définissant v_n est convergente et v_n est bien définie.

(b) Pour tout $t \geqslant 1$, on a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$1 + t + t^n \geqslant t^n > 0 \text{ donc } 0 \leqslant \frac{1}{1 + t + t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}$$

et en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant (toutes les intégrales sont bien convergentes) :

$$0 \leqslant v_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}.$$

et on calcule cette dernière intégrale en revenant à l'intégrale partielle : pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^n}\ dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{n-1}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{n-1} \quad \text{et enfin} \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

(c) Par théorème de comparaison , comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, (v_n) converge vers 0.

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t + t^n}\ dt = \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ln 2 + 0 = \ln 2.$$

Exercice 2. : edhec 2012

1. 1ère méthode (la plus simple) :
   Si f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable, elle admet une matrice diagonale D dans une base de vecteurs propres.

   La matrice de $f \circ f$ étant D^2, elle est encore diagonale donc $f \circ f$ est diagonalisable.

   Deuxième méthode :
   il existe une base de vecteurs propres (u, v, w) associés à des valeurs propres (α, β, γ).
   On aura alors $f \circ f(u) = f(f(u)) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha^2 f(u)$ donc u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre α^2 et de même pour v et w.
   (u, v, w) est donc une base de vecteurs propres de f^2, qui est alors diagonalisable.

2. (a) On calcule :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   Donc
$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
   Donc $P(x) = x^4 - 1$ est annulateur de A, et λ est racine de P si $\lambda^4 = 1$, donc si et seulement si $\lambda^2 = 1$ ou -1, la deuxième étant absurde on obtient $\lambda^2 = 1$ puis $\lambda = \pm 1$.
   Finalement $\operatorname{Sp} A \subset \{-1; 1\}$.

   (b) $(x, y, z) \in \ker(g - Id) \Longleftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 & \\ 2x - 6y + 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 3x - 8y + 5z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$
   Donc $\ker(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,[(1, 1, 1)]$ et avec $u = (1, 1, 1)$ la famille (u) est génératrice de $\ker(g - \mathrm{Id})$ et libre car constituée d'un unique vecteur non nul, donc c'est une base de $\ker(g - \mathrm{Id})$.

   (c) $(x, y, z) \in \ker(g + Id) \Longleftrightarrow (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 & \\ 2x - 4y + 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3x - 8y + 7z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \\ -14y + 10z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y = 3/4z \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0.$$
   D'où $\ker(g + \mathrm{Id}) = \{0\}$.

   (d) On en déduit que $\operatorname{Sp} A = \{1\}$ car -1 n'est pas valeur propre et que la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 1, donc A et par suite g ne sont pas diagonalisables.

3. (a) Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :
$$A^2 X = -X \Leftrightarrow (A^2 + I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y - z \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\ker(g^2 + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,[(1,1,0),(-1,0,1)]$.

La famille $[(1,1,0),(-1,0,1)]$ est donc génératrice de $\ker(g^2 + \mathrm{Id})$ et libre (2 vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de $\ker(g^2 + Id)$.

En posant $v = (1,1,0)$ et $w = (-1,0,1)$ on a donc : (v,w) est une base de $\ker(g^2 + \mathrm{Id})$.

(b) On avait $u = (1,1,1)$.
On montre que la famille (u,v,w) est libre :

Soient x, y, z réels,

$$xu + yv + zw = 0 \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -x \\ z = -x \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

La famille (u,v,w) est donc une famille libre et de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$, avec $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On avait $g(u) = u$ donc $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u = 1u + 0v + 0w$.
v et w sont des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 donc $g^2(v) = v = 0u + 1v + 0w$ et de même $g(w) = 0u + 0v + 1w$.
La matrice de g dans la base (u,v,w) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que g^2 est diagonalisable alors que g ne l'est pas, ce qui constitue un contre-exemple de la réciproque étudiée : cette réciproque est donc fausse.

Exercice 3. : edhec 2013

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } x \in [-1;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

(a) On calcule :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De plus la fonction f est paire :

- son domaine de définition, $\mathbb{R}$, est centré en 0.
- Si $x \in [-1;1]$, alors $-x \in [-1;1]$ donc $f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$.
- Si $x \notin [-1;1]$, alors $-x \notin [-1;1]$ donc $f(-x) = 0 = f(x)$.

on en déduit que

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

(b)
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et 1, car les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1 - |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- f est positive sur $[-1;1]$ car sur cet intervalle, $|x| \leqslant 1$ donc $1 - |x| \geqslant 0$.
D'autre part f est positive en dehors de $[-1;1]$ car la fonction nulle est positive.

- Sous réserve de convergence, la relation de Chasles donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dx + \int_{-1}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} 0\ dx$$

Or les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} 0\ dx$ et $\int_{1}^{+\infty} 0\ dx$ convergent et valent 0 comme intégrales de la fonction nulle.

D'autre part les deux dernières intégrales ne sont pas généralisées donc convergent, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est donc convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

.

On en déduit que f est bien une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et admettant f comme densité.

2. (a) Première méthode pour cette question : X est à support borné donc admet des moments de tous ordres, donc une espérance.

Deuxième méthode : sous réserve de convergence absolue,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dx + \int_{-1}^{1} xf(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} 0\ dx$$

Or les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} 0\ dx$ et $\int_{1}^{+\infty} 0\ dx$ convergent absolument et valent 0 comme intégrales de la fonction nulle.

D'autre part la dernière intégrale n'est pas généralisée donc converge absolument, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge absolument ce qui signifie que X admet une espérance et : :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_{-1}^{1} xf(x)\ dx$$

Or f est paire donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire, ce qui implique que cette intégrale est nulle. Donc :

$$E(X) = 0$$

(b) Sous réserve de convergence absolue,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dx + \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx + \int_{1}^{+\infty} 0\ dx$$

Or les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} 0\ dx$ et $\int_{1}^{+\infty} 0\ dx$ convergent absolument et valent 0 comme intégrales de la fonction nulle.

D'autre part la dernière intégrale n'est pas généralisée donc converge absolument, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge absolument ce qui signifie que X^2 admet une espérance et : :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\ dx$$

Or f est paire donc la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire, ce qui implique que :

$$E(X^2) = 2\int_{0}^{1} x^2 f(x)\ dx = 2\int_{0}^{1} x^2(1-x)\ dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Finalement X admet un moment d'ordre deux donc admet une variance et par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}$$

3. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$
On sépare ce calcul en quatre cas (l'énoncé a la bonté de nous les donner) et pas 3 à cause de la valeur absolue :

- Pour $x < -1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$.
- Pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$,
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{x} (1+t)\ dt = \left[\frac{(1+t)^2}{2}\right]_{-1}^{x} = 0 + \frac{1+x^2+2x}{2} = \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}$$
- Pour $0 < x \leqslant 1$,
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{0} (1+t)\ dt \int_{0}^{x} (1-t)\ dt = 0 + \frac{1}{2} + \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1+x^2-2x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$$
- Pour $x > 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{0} (1+t)\ dt \int_{0}^{1} (1-t)\ dt + \int_{1}^{+\infty} 0\ dt = 1$.

On en déduit finalement :
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. (a) Pour $x < 0$, l'évènement $[Y \leqslant x] = [|X| \leqslant x < 0]$ est impossible donc :
$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \leqslant x) = 0$$
(b) Pour $x \geqslant 0$, on a :
$$[Y \leqslant x] = [|X| \leqslant x] = [-x \leqslant X \leqslant x]$$
car la valeur absolue est inférieure à un nombre si et seulement si la valeur de x est comprise entre ce nombre et son opposé.
Avec X une variable à densité (donc $\mathrm{P}(X < -x) = F_X(-x)$) :
$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \leqslant x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) - \mathrm{P}(X < -x) = F_X(x) - F_X(-x)$$
(c) Y est une variable à densité, on obtient une densité de Y en dérivant F_Y sauf aux points où elle n'est pas dérivable où on donne une valeur arbitraire (ici il y a 0 et peut-être -1 et 1) :

Pour $x < 0$,
$$g(x) = F_Y'(x) = 0$$
Pour $x > 0$,
$$g(x) = F_Y'(x) = F_X'(x) + F_X'(-x) = f(x) + f(-x) = 2f(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$
par parité de f. En rassemblant et en donnant des valeurs aux points 0 et 1 :
$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0;1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(d) Sous réserve de convergence, la relation de Chasles donne

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{1} 2t(1-t)\ dt + \int_{1}^{+\infty} 0\ dt$$

On a vu que l'intégrale de 0 converge toujours absolument et vaut 0, et l'intégrale du milieu n'est pas généralisée à chaque fois donc converge absolument à chaque fois.

On en déduit que Y admet une espérance et :

$$E(Y) = 2\int_{0}^{1} t(1-t)\ dt = 2\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5. On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
On pose $I = \mathrm{Inf}(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \mathrm{Min}(\ U(\omega), V(\omega)\ )$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $\mathrm{P}(I > x) = \mathrm{P}(\ [U > x] \cap [V > x]\ )$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

(a) On se ramène à U et V ; comme elles sont indépendantes et suivent la même loi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_I(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = 1-\mathrm{P}(X > x) = 1-\mathrm{P}(\ [U > x]\cap[V > x]\ ) = 1-\mathrm{P}(U > x)\ \mathrm{P}(V > x) = 1-[1-F_U(x)]^2$$

et en remplaçant F_U par sa valeur (0, x puis 1) :

$$F_I(x) = \begin{cases} 1-(1-0)^2 = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1-(1-1)^2 = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(b) On a admis que I est à densité, on dérive sa fonction de répartition sauf en 0 et 1 ou on donne des valeurs arbitraires et on trouve :

$$f_I(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0;1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = g(x)$$

donc I et Y ont bien la même loi.

6.

7. **Informatique :**

(a) La commande `rand(1,1000)` construit un vecteur ligne à 1000 colonnes dont chaque coefficient est choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1]$. Or on sait que si X est choisi (totalement) au hasard dans $[0,1]$ alors X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.
L'instruction `rand(1,1000)` revient donc à choisir 1000 variables suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, donc fait la même chose que l'instruction `grand(1,1000,'unf',0,1)`.

(b)
```
u=rand(1,1000)
v=grand(1,1000,'unf',0,1)
y=min(u,v)


x=0:0.01:1
histplot(x,y)
plot(x,2*(1-x),color='red')
```
La dernière instruction trace la courbe de la densité de la variable Y sur le segment $[0,1]$.

(c) Les fréquences de chaque classe $c = [x, x+0,01]$ (aire de l'histogramme sur une classe) sont très proches de l'aire correspondante sous la courbe de la densité $= \int_x^{x+0,01} f = P(Y \in [x, x+0,01])$. On retrouve la propriété (loi faible des grands nombres) affirmant que la fréquence d'un évènement (ici $(Y \in c)$) converge vers la probabilité théorique $P(Y \in c)$ lorsque le nombre de simulations indépendantes de la variable Y tend vers $+\infty$.

(d) L'instruction `cumsum(y(1:200))./[1:200]` crée le vecteur ligne `[y(1)  (y(1)+y(2))/2  (y(1)+y(2)+y(3))/` i.e. `[mean(y(1))  mean(y(1:2))  mean(y(1:3))  ...etc....mean(y(1:200))]` Or on sait que lorsque le nombre de simulations indépendantes de Y tend vers $+\infty$, la moyenne de ces simulations tend vers $E(Y) = 1/3$, ce que l'on visualise en traçant en rouge la fonction constante égale à $1/3$ (en effet, tous les termes de `1/3*ones(1,200)` valent $1/3$).

8. Sur le même modèle (avec l'indépendance et la même loi on obtient) :

$$F_{I_n}(x) = 1 - \mathrm{P}(I_n > x) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_i > x)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > x) = (1 - F_U(x))^n$$

où F_U désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$ donc :

$$F_{I_n}(x) == \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice supplémentaire

Exercice 4. : EML 2005

1. L'allure de la courbe de f sur $]-\infty; 0]$ est évidente.

   f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad f'(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} < 0$$

   donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Déterminons ses limites :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = 1 \quad \text{par quotient de limites}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(t) = 0 \quad \text{par quotient de limites}$$

   Il ne reste plus qu'à tracer une courbe respectant les variations et les limites, en n'oubliant pas la partie nulle sur $\mathbb{R}^-$.

2.
   - $0 \geqslant 0$ et $\frac{1}{(1+t)^2} \geqslant 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Les fonctions $t \to 0$ et $t \to \frac{1}{(1+t)^2}$ sont continues sur leurs ensembles de définition donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
   - Par relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt$.
     - $\int_{-\infty}^{0} 0\ dt$ converge et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle.
     - $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt$ n'est généralisée qu'en $+\infty$ car $t \to \frac{1}{(1+t)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$. On considère alors l'intégrale partielle :

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\ dt \quad = \quad \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.

– On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.

- Enfin f est bien une densité de probabilité.

3. Comme f est une densité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et on en déduit que $\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge pour tout x réel.

   - Pour $x \leqslant 0$,
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$
   - Pour $x \geqslant 0$,
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

4. Pour $\alpha \geq 0$ (l'autre cas est impossible),
$$\int_0^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2} \iff \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \iff 2\alpha = 1+\alpha \iff \alpha = 1.$$
Donc $\alpha = 1$ est l'unique réel vérifiant $\int_0^{\alpha} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

5. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

   On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[,\ \varphi_x(u) = \displaystyle\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt$.

   (a) On a :
$$\varphi_x(0) = \int_{x-0}^{x+0} f(t)\ dt = \int_{x}^{x} f(t)\ dt = 0.$$
   D'autre part, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge alors :
$$\int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt \xrightarrow[u\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.$$

   (b) Soient $0 \leqslant u < v$ alors en considérant le signe de la différence :
$$\begin{aligned}
\varphi_x(v) - \varphi_x(u) - \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt &= \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)\ dt - \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt \\
&= \int_{x-v}^{x+v} f(t)\ dt + \int_{x+u}^{x-u} f(t)\ dt + \int_{x+v}^{x+u} f(t)\ dt \\
&= \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt
\end{aligned}$$
   La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, étudions l'ordre des bornes en étudiant à nouveau la différence :
$$(x-u) - (x-v) = x - u - x + v = v - u > 0 \quad \text{donc } (x-u) > (x-v)$$
   et les bornes sont dans l'ordre croissant ; par positivité de l'intégrale on a donc :
$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) - \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt = \int_{x-v}^{x-u} f(t)\ dt \geqslant 0$$
   et enfin :
$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt$$

On étudie le signe de cette intégrale :

$$(x+v)-(x+u)=v-u>0$$

donc les bornes sont dans l'ordre strictement croissant, et pour $x>0$ et $0\leqslant u<v$, on a

$$0<x+u<x+v$$

donc $f(t)>0$ sur l'intervalle $[x+u;x+v]$.

Par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{x+u}^{x+v} f(t)\ dt>0$$

donc que

$$\varphi_x(v)-\varphi_x(u)>0$$

et enfin :

$$u<v\Longrightarrow \varphi_x(u)<\varphi_x(v)$$

donc la fonction φ_x est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(c) On admet que φ_x est continue sur $[0;+\infty[$. Elle est donc strictement croissante et continue donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $\left[\varphi_x(0);\lim\limits_{+\infty}\varphi_x\right[=[0,1[$.

Comme $\frac{1}{2}\in[0,1[$ alors l'équation $\varphi_x(u)=\frac{1}{2}$, d'inconnue u, admet une unique solution dans $[0;+\infty[$.

6. (a) La solution $U(x)$ à l'équation précédente étant unique sur $[0;+\infty[$, il suffit de vérifier que $1-x$ est une solution de cette équation.

Tout d'abord pour $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{2}\leqslant 1-x\leqslant 1$ donc $1-x\in[0;+\infty[$.

D'autre part on calcule :

$$\varphi_x(1-x)=\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)\ dt=\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}\ dt=\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

Donc pour tout $x\in[0;\frac{1}{2}[$, $1-x$ est bien une solution. C'est donc **la** bonne, et on obtient :

$$U(x)=1-x.$$

(b) Pour tout $x\in[\frac{1}{2};+\infty[$,

$$\varphi_x(x)=\int_{x-x}^{x+x} f(t)\ dt=\int_0^{2x}\frac{1}{(1+t)^2}\ dt=\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{2x}=1-\frac{1}{1+2x}.$$

Donc

$$\varphi_x(x)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2x}=\frac{2x-1}{2\,(1+2x)}\geqslant 0$$

car $x\geqslant\frac{1}{2}$ donc $2x-1\geqslant 0$ et $1+2x\geqslant 0$. Enfin,

$$\varphi_x(x)\geqslant\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\varphi_x(x)\geqslant\varphi_x\left(U(x)\right)$$

et comme φ_x est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que x et $U(x)$ en sont éléments,

$$x\geqslant U(x)\quad\text{ et donc }\quad x-U(x)\geqslant 0.$$

Enfin, comme $x - U(x) \geqslant 0$, alors $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ sur tout l'intervalle $[x - U(x); x + U(x)]$ et :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(U(x)) &= \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\ dt = \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_{x-U(x)}^{x+U(x)} \\
&= \frac{-1}{1+x+U(x)} + \frac{1}{1+x-U(x)} = \frac{-(1+x-U(x)) + (1+x+U(x))}{(1+x+U(x))(1+x-U(x))} \\
&= \frac{2U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_x(U(x)) = \frac{1}{2} \iff \frac{2U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{1}{2} \iff U(x)^2 + 4U(x) - (1+x)^2 = 0.$$

Cette équation du second degré en $U(x)$ a pour discriminant

$$\Delta = 16 + 4(1+x)^2 = 4\big(4 + (1+x)^2\big)$$

et pour racines :

$$U(x) = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4+(1+x)^2}}{2} = -2 \pm \sqrt{4+(1+x)^2}.$$

Or la solution $-2 - \sqrt{4+(1+x)^2}$ est absurde car elle est strictement négative et $U(x) \geqslant 0$ donc :

$$U(x) = -2 + \sqrt{4+(1+x)^2}.$$

7. (a) Pour $x \geqslant \frac{1}{2}$ on a $4 + (1+x)^2 \geqslant 0$ donc U est continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ comme somme et composée de fonctions continues.

De plus elle est continue ($\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $U(x) = 1 - x$) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ comme fonction polynomiale.

En $\frac{1}{2}$ on a

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = -2 + \sqrt{\frac{25}{4}} = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

puis :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} U(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} -2 + \sqrt{4+(1+x)^2} = -2 + \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} = U\left(\frac{1}{2}\right)$$

et enfin :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} U(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} 1 - x = \frac{1}{2} = U\left(\frac{1}{2}\right)$$

Finalement U est continue en $\frac{1}{2}$, et donc sur $[0, +\infty[$.

(b) De même, U est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ ($4 + (1+x)^2 > 0$ pour la racine) et sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ par opérations élémentaires sur les fonctions dérivables.

En $\frac{1}{2}$ il faut tester si les dérivée à droite et à gauche existent et sont égales :

- Pour $x < \frac{1}{2}$, avec le changement de variable $y = x - \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to \frac{1}{2}^-]{} 0^-$ on a :

$$\frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1 - x - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{-y}{y} = -1 \xrightarrow[y \to 0^-]{-} 1$$

donc U est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ et sa dérivée à gauche vaut $U'_g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

- Pour $x > \frac{1}{2}$, avec le changement de variable $y = x - \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to \frac{1}{2}^-]{} 0^-$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{U(x) - U\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{4 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2}}{y} = \frac{-\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + 3y + y^2}}{y} \\
&= \frac{-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{1 + \frac{12}{25}y + \frac{4}{25}y^2}}{y} \\
&= \frac{\frac{5}{2}\left(-1 + \left[1 + \frac{1}{2} \times \frac{12}{25}y + o(y)\right]\right)}{y} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{6}{25} + o(1)\right) \\
&= \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{5}{2} \times \frac{6}{25} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Donc U est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$ et sa dérivée à gauche est $U'_d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$.

Comme $-1 \neq \frac{3}{5}$ alors U n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

(c) Pour tracer la courbe représentative de U, on trace la partie jusqu'à $\frac{1}{2}$ sans problème (c'est une droite), puis il faut placer la demi tangente en $\frac{1}{2}^+$ et bien sûr respecter les variations (U strictement croissante).

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{cases}$

(a) On le prouve par récurrence :

- **Initialisation** :
$$a_0 = 1 \geqslant \frac{1}{2}$$
donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $a_n \geqslant \frac{1}{2}$, on a alors par croissance de U :
$$a_{n+1} = U(a_n) \geqslant U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion** :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

(b) Etudions le signe de $U(x) - x$ sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, en procédant par équivalence pour isoler la racine et composer par la fonction carrée :

$$U(x) - x < 0 \iff \sqrt{4 + (1 + x)^2} < x + 2$$

Les deux quantités sont positives (on considère $x \geqslant 0$, donc $x + 2 \geqslant 2 \geqslant 0$ et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc :

$$U(x) - x < 0 \iff 4 + (1 + x)^2 < (x + 2)^2 \iff x^2 + 2x + 5 < x^2 + 4x + 2 \iff 1 < 2x \iff x > \frac{1}{2}$$

ce qui nous donne le tableau de signe de $U(x) - x$:

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$U(x)$	0	$-$	

On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant \frac{1}{2}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - a_n = U(a_n) - a_n \leqslant 0$$

et la suite (a_n) est décroissante.

(c) La suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant \frac{1}{2}$.

Comme U est continue sur $[0, +\infty[$ elle est continue en ℓ ; on obtient alors par passage à la limite de $a_{n+1} = U(a_n)$ que :

$$U(\ell) = \ell$$

et on résout cette équation sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$: le tableau de signe de $U(x) - x$ vu à la question b) assure que la seule solution est $\ell = \frac{1}{2}$.

Donc (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Remarque : on pouvait résoudre à nouveau l'équation, avec la même méthode que pour l'inéquation : on isole la racine et on met au carré.

(d) On calcule a_n et n tant que $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = a_n - \frac{1}{2} > 10^{-6}$:

```
a=1 , n=0
while abs(a-0.5)>10^(-6) do
   a=sqrt(4+(1+a)^2)-2
   n=n+1
end
disp(n)
```