Indications du devoir maison n° 11

Exercice 1.

1. (a)
   - Pour toute intégrale, on déterminer en quelle(s) valeur(s) elle est généralisée en donnant l'intervalle sur lequel la fonction intégrée est continue.
   - Pour obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale généralisée, on passe par l'intégrale partielle ou par un moment d'une loi usuelle.

   (b) On a une expression en fonction de n : pour obtenir un équivalent simple, on factorise au maximum puis on factorise toutes les sommes par leur terme prépondérant et on utilise le fait qu'un facteur qui tend vers une limite finie non nulle est équivalent à cette limite. Enfin s'il reste un facteur compliqué mais qui a la bonne forme on peut tenter de le simplifier par DL avant de factoriser par un terme prépondérant.

2.
   - Pour prouver qu'une série converge sans obtenir sa valeur, on passe par un théorème de transfert.
   - On tente (dans cet ordre) : une inégalité donnée par l'énoncé (on ne cherche surtout pas à en trouver une soi-même), un équivalent (avec la méthode précédente), une négligeabilité devant le terme général d'une série convergente (en général $\frac{1}{n^2}$).
     Ici on n'a aucune inégalité, mais l'équivalent s'obtient sans problème.

3. (a) Méthode ultra classique : la comparaison série intégrale. Voir les nombreux exemples du cours si la méthode n'est pas maîtrisée.

   (b) Suite de la méthode précédente, tout aussi classique.

   (c)
   - Un peu moins classique mais habituel, l'obtention d'un équivalent en conclusion : il faut encadrer la quantité dont on cherche un équivalent (fin de la méthode de comparaison série/intégrale, toujours aussi classique), puis on divise alors par le plus simple des deux et les limites des deux côtés doivent valoir un, ce qui donne un quotient qui tend vers un au milieu, donc un équivalent.
   - Remarquer qu'une question précédente permet alors de donner un vrai équivalent simple.

4.

Exercice 2.

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. Sans indication, on revient à la méthode habituelle avec $M_a - \lambda I$.

2. Evident.

3. Pour obtenir les racines d'un polynôme de degré 3, on détermine une racine α et on factorise le polynôme par $(x - \alpha)$.

4. On a déjà le spectre de M_1, on repart de là, en s'intéressant à la somme des dimensions des sous-espace propres ; ou bien en raisonnant par l'absurde puisque M_1 a une seule valeur propre.

II. Réduction de la matrice M_a.

1. On connaît la dimension de E (justifier tout de même!), il faut donc prouver qu'il y a le bon nombre de vecteurs (évident) et qu'elle est libre. Pour cela, on écrit l'équation et on identifie les coefficients sur la base $\mathcal{B}$.

2. Evident.

3.
   - Pour prouver qu'un ensemble est inclus dans un autre, on prend un élément de cet ensemble et on vérifie qu'il est dans l'autre. Reste à trouver l'écriture d'un élément quelconque de $f_a(F)$!
   - Première possibilité L'image d'un espace vectoriel A par une application linéaire u est donnée par $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n)$ où $(e_1, ..., e_n)$ est une base de A.
   - Il reste donc à déterminer une base de F pour calculer $f_a(F)$ sou forme d'un Vect(...) ce qui permet d'en prendre un élément quelconque.
   - Deuxième possibilité : utiliser $f_a(F) = \{f_a(x) \text{ tq } x \in F\}$ donc il suffit de prendre un x quelconque dans F et de calculer $f_a(x)$ pour avoir un élément quelconque de $f_a(F)$.

4. Evident.

5. Il suffit de savoir écrire une récurrence.

III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

1. Ultra classique; partir du côté le plus compliqué (côté droit) et calculer.

2. Deux récurrences ultra classiques à faire en une seule; il suffit de savoir écrire une récurrence.

3.
   - Attention, on demande P_2^{-1}, pas P_a^{-1}! Donner d'abord P_2 puis utiliser la méthode du pivot.
   - Le principe de cette méthode est, pour calculer u_n, de calculer d'abord le vecteur $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

4. Evident. Attention à justifier pour la convergence d'une suite géométrique.

5.

Exercice 3.
Partie I

1. Formules de cours.

2. • Il faut d'abord remarquer que $|X_1 - X_2| = 0 \Leftrightarrow X_1 - X_2 = \pm 0 = 0$.
   • Ensuite, C'est la proba d'un évènement dépendant de deux variables aléatoires : on doit donc utiliser les probas totales avec le système complet de l'une des deux .

3. (a) C'est la proba d'un évènement dépendant de deux variables aléatoires : on doit donc utiliser les probas totales avec le système complet de l'une des deux .
   Ici l'énoncé donne le résultat à obtenir donc il faut analyser le résultat donné pour choisir le bon sce parmi celui de X_1 et celui de X_2.

(b) Le "en déduire" indique d'utiliser la question précédente : il faut donc décomposer l'évènement demandé à l'aide de celui de la question 3a. : en effet, $|X_1 - X_2| = n$ se traduit par $(X_1 - X_2 = n) \cup (X_1 - X_2 = -n)$

4. (a) La linéarité, le produit indépendant, le transfert, ne peuvent pas s'appliquer ici : il ne reste que la définition de l'espérance. On veut l'existence et la valeur, il faut donc la convergence absolue et la valeur d'une série : on doit donc faire apparaître des séries usuelles ou bien télescoper.

   (b) Cette fois le résultat donné avec $V(X_1)$ indique de faire apparaître $E(X_1^2)$: on doit donc choisir la linéarité de l'espérance et le produit indépendant après avoir développé le carré.

5. Pour obtenir une égalité d'évènements, on explique avec une phrase précise pourquoi ils représentent la même situation.

6. (a) La question précédente écrit A avec deux variables aléatoires : on utilise donc les probas totales avec le sce de l'une des deux. Comme en 3a, le résultat donné par l'énoncé doit permettre de choisir le bon parmi les 2 sce.

   (b) Il faut calculer $P(X_3 > k)$ puis la somme : pour calculer $P(X_3 > k)$ pour une variable <u>discrète</u>, il faut d'abord calculer $P(X_3 \leqslant k)$ en sommant les probabilités sur toutes les valeurs inférieures ou égale à k, puis passer à l'évènement contraire.

   Pour la somme de série, comme la valeur est demandée, il ne peut s'agir que d'une série usuelle à faire apparaître ou d'un télescopage.

7.

Partie II

1. Formules de cours.

2. (a) L'évènement dépend de deux variables aléatoires, une nouvelle fois on applique les probas totales. Attention, une variable à densité n'a pas de sce associé : du coup le sce à utiliser ne doit faire aucun doute (de nouveau, l'énoncé permet à nouveau de le repérer).

   (b) Il faut calculer la somme d'une série : à nouveau, les séries usuelles et le télescopage sont les seules possibilités connues.

   (c) Le seul moyen de trouver une densité, et le seul moyen de prouver qu'une variable est à densité, est de travailler avec la fonction de répartition. Il est donc obligatoire de la calculer en préalable. Attention, une fonction de répartition est toujours définie sur $\mathbb{R}$. Il ne faut donc pas oublier de donner la fonction de répartition de Z sur $]-\infty; 0[$ en réfléchissant aux valeurs prises prises par la variable Z.

   Ensuite une seule méthode existe pour montrer qu'une variable est à densité (régularité de la fonction de répartition) et pour déterminer une densité (dérivée de la fonction de répartition).

3.