Correction du devoir maison n° 11

Exercice 1. : edhec 2003

1. (a) On passe par l'intégrale partielle : pour tout $y \geqslant n$, on a :

$$\int_n^y f(x)\ dx = -\int_n^y -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_n^y = -e^{\frac{1}{y}} + e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} e^{\frac{1}{n}} - 1$$

car $\frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ donc $e^{\frac{1}{y}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1$.
On ne déduit que l'intégrale I_n converge, et

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\ dx = e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

(b) $u = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$e^u = 1 + u + o(u) \quad \text{donc} \quad e^u - 1 = u + o(u) = u(1 + o(1)) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

et enfin :

$$I_n \sim \frac{1}{n}$$

2. On procède par théorème de comparaison et on cherche un équivalent simple de u_n :

$$u_n = f(n) = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

car

$$e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1.$$

Or les deux séries sont à termes positifs et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$), donc le théorème de comparaison assure que la série de terme général $u_n = f(n)$ converge.

3. (a) Ce type d'inégalité, très classique, repose sur la monotonie de f :

f est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions de classe C^∞, avec $x^2 \neq 0$ sur cet intervalle. De plus pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \times x^2 - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(-1-2x) < 0 \quad \text{sur }]0;+\infty[$$

donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On en déduit que pour tout $k > 0$ et pour tout $x \in [k;k+1]$,

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$$

et en intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$ (les bornes sont dans l'ordre croissant) on obtient :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\ dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\ dx$$

qui donne enfin :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k)$$

car

$$\int_k^{k+1} dx = (k+1) - k = 1.$$

(b) On somme ces inégalités pour k allant de n à p où p est un entier quelconque supérieur à $n+1$:

$$\sum_{k=n}^{p} u_{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{p} \int_{k}^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \sum_{k=n}^{p} u_k.$$

Cela donne après un changement d'indice dans la première somme et par relation de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \int_{n}^{p+1} f(x)\ dx \leqslant u_n + \sum_{k=n+1}^{p} u_k.$$

On fait alors tendre p vers $+\infty$, et comme les deux séries et l'intégrale convergent (questions 1 et 2) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\ dx \leqslant \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Enfin on reconnaît I_n :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

(c) On pose $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on cherche à l'encadrer :
L'inégalité de gauche donne

$$v_n \leqslant I_n$$

et celle de droite donne

$$v_n \geqslant I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

donc on obtient l'encadrement :

$$I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leqslant v_n \leqslant I_n.$$

Pour obtenir un équivalent on va chercher à encadrer par deux quantités qui tendent vers 1, on divise donc cette inégalité par I_n, strictement positif :

$$1 - \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} \leqslant \frac{v_n}{I_n} \leqslant 1.$$

On cherche la limite du terme de gauche :

$$I_n \sim \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} \sim \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par quotient de limites, car par composée $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$.

On en déduit que

$$1 - \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis par théorème d'encadrement

$$\frac{v_n}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad v_n \underset{+\infty}{\sim} I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et enfin :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. **Informatique :**

(a) Grâce aux "points", on fait des produits et des quotients termes à termes des matrices concernées. Le n−ième coefficient de la matrice `ones(1,1000)` étant 1, et celui de la matrice `k` étant n, le n−ième coefficient de la matrice `U` est donc $U(n) = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

(b) `S` fait la somme cumulée des termes de `U` donc $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

(c) $R(n) = S(1000) - S(n) = \sum_{k=1}^{1000} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{1000} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

(d) On admet que $R(n) \simeq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.
On trace donc (une valeur approchée) des 100 premiers termes de la suite (v_n) de la question 3.(c). On remarque que le comportement de cette suite coïncide au voisinage de $+\infty$ avec celui de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui illustre l'équivalent obtenu à la question 3.(c).

Exercice 2. : ecricome 2010
Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que la fonction polynômiale Q qui à tout réel x associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

I. Recherche des valeurs propres de f_a.

1. On essaye d'inverser la matrice $M_a - \lambda I$: on réalise les opérations

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad , \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad , \quad L_3 \leftarrow L_3 - (a+2-\lambda)L_1 \quad , \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - [\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)]\, L_2$$

$$\begin{pmatrix} a+2-\lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ a+2-\lambda & -(2a+1) & a \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda(a+2-\lambda) - (2a+1) & a \end{pmatrix}$$

$$M_a - \lambda I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & a + \lambda\left[\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)\right] \end{pmatrix}$$

Cette réduite triangulaire n'est pas inversible si et seulement si

$$P(\lambda) = a + \lambda\left[\lambda(a+2-\lambda) - (2a+1)\right] = a + \lambda\left[a\lambda + 2\lambda - \lambda^2 - (2a+1)\right]$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 - (2a+1)\lambda + a = -Q(\lambda)$$

est nul.

Les valeurs propres de M_a et par suite de f_a sont donc les racines de Q.

2. On calcule :

$$Q(1) = 1 - (a+2) + (2a+1) - a = 1 - a - 2 + 2a + 1 - a = 0$$

donc $\lambda = 1$ est une racine de Q.

3. On en déduit que $Q(x)$ se factorise par $x - 1$:

$$Q(x) = (x-1)(bx^2 + cx + d)$$

On développe et on identifie :

$$Q(x) = bx^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a$$

donc :

$$\begin{cases} b = 1 \\ c - b = -a - 2 \Leftrightarrow c = -a - 2 + b = -a - 2 + 1 = -a - 1 \\ d - c = 2a + 1 \Leftrightarrow d = 2a + 1 - a - 1 = a \\ d = a \end{cases}$$

On obtient
$$Q(x) = (x-1)\left[x^2 - (a+1)x + a\right]$$
donc
$$Q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ (déjà vue) ou } x^2 - (a+1)x + a$$
On calcule le discriminant de ce polynôme du seconde degré et on discute selon son signe :
$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$
Il y a deux possibilités :

1er cas : $a = 1$, alors $\Delta = 0$ et il y a une seule solution (double)
$$\lambda = \frac{a+1}{2} = 1$$
donc Q a une seule racine : $\lambda = 1$.

2e cas : $a \neq 1$, alors $\Delta > 0$ et il y a deux solutions :
$$\lambda_1 = \frac{a+1-(a-1)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{a+1+a-1}{2} = a$$
Il y a donc au total deux racines pour Q : 1 et $a \neq 1$.

4. Si $a = 1$, l'unique valeur propre de f_1 est 1. On prouve alors par l'absurde que f_1 n'est pas diagonalisable.

   Supposons que f_1 est diagonalisable, alors M_1 aussi, et comme sa seule valeur propre est 1, elle est semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale : I.
   D'où il existe P inversible tel que $M_1 = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde car $M_1 \neq I$.

   On en déduit que f_1 n'est pas diagonalisable.

   Remarque : on peut aussi calculer le sous-espace propre associé à la valeur propre 1, et vérifier qu'il n'est pas de dimension 3 pour conclure avec la somme des dimensions des sous-espaces propres.

II. Réduction de la matrice M_a.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose a différent de 1.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par :
$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. Il y a trois vecteurs de E qui est de dimension 3, il suffit donc de prouver que la famille est libre.
   On résout le système $xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0$.

   1ère possibilité (rigoureuse) : travailler avec E quelconque, pas forcément $\mathbb{R}^3$:
$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Longleftrightarrow (xa^2 + y + 2z)e_1 + (xa + y + z)e_2 + (x+y)e_3 = 0$$
   et comme (e_1, e_2, e_3) est une base de E :
$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + y \quad = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (1-a^2)y + 2z = 0 \\ (1-a)y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (1-a)y + z = 0 \\ [2-(1+a)]\,z = 0 \end{cases}$$
   Or $1 - a \neq 0$ puisqu'on a supposé $a \neq 1$, donc on obtient $x = y = z = 0$, et la famille $\mathcal{B}'$ est libre et admet trois vecteurs en dimension 3 : c'est une base de E.

2e possibilité (moins rigoureuse) : assimiler E à $\mathbb{R}^3$, et écrire les vecteurs avec des coordonnées en colonnes ou en lignes pour arriver au même système.

On note P_a la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

2. On passe par la matrice et les vecteurs colonnes associés dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $f_a(e'_1) = ae'_1$ et $e'_1 \neq 0$ donc e'_1 est un vecteur propre de f_a, associé à la valeur propre a.

3. Calculons $f_a(F)$ et vérifions que $f_a(F) \subset F$: comme F admet pour base (e'_2, e'_3) on sait que

$$f_a(F) = \text{Vect}[f_a(e'_2), f_a(e'_3)]$$

qu'on calcule :

$$M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$f_a(e'_2) = e'_2 \qquad \text{et } f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$$

puis

$$f_a(F) = \text{Vect}(e'_2, e'_2 + e'_3) = \text{Vect}(e'_2, e'_3) = F$$

avec l'opération de pivot $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

On en déduit bien que $f_a(F) \subset F$.

Remarque : on pouvait aussi prendre un vecteur quelconque de F sous la forme $xe'_2 + ye'_3$, calculer son image et montrer qu'elle appartient à F.

4. On vient de calculer $f_a(e'_1) = e'_1$, $f_a(e'_2) = e'_2$ et $f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$ donc :

$$T_a = Mat_{B'}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 0$, $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : $T^0 = I$, ça marche.

Hérédité : supposons que $T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0 \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

1. On calcule en partant du plus compliqué :

$$M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

2. En préalable, la formule de changement de base donne :

$$M_2 = Mat_{\mathcal{B}}(f_2) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f_2) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_2 T_2 P_2^{-1}$$

Montrons à présent par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$:

Initialisation : $P_2 T_2^0 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = P_2 T_2^{n+1} P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

3. Avec des pivots de Gauss on obtient

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on calcule

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 3 \times 2^n - 5n - 2 \end{pmatrix}$$

et on peut conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2$$

4. On factorise par le terme prépondérant :

$$u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2 = 3 \times 2^n \left(1 - \frac{5n}{3 \times 2^n} - \frac{2}{3 \times 2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

par croissances comparées d'une suite puissance et d'une suite géométrique, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

5. **Informatique :**

(a) Compléter le programme suivant de manière à ce que, pour tout $n \in [\![1, 20]\!]$, la n-ième colonne de la matrice X contienne la valeur du vecteur colonne $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$:

```
M=[4 -5 2; 1 0 0; 0 1 0]

X=zeros(3,20)
X(:,1)=[7;0;-1]
for n=1:19 do
    X(:,n+1)=M*X(:,n)
end
```

(b) La troisième ligne de la matrice X contient les termes successifs de la suite (u_n) c'est-à-dire que le coefficient numéro k contient u_k.
On obtient donc la représentation graphique de la suite (u_n). On remarque qu'elle a l'air de diverger très rapidement vers $+\infty$, ce qui est cohérent avec le fait que $u_n \sim 3 \times 2^n = 3e^{n \ln(2)}$: la croissance est exponentielle.

Exercice 3. : EML 2010

Partie 1

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'évènement : "C_3 termine en dernier son opération".
Ainsi l'évènement A est égal à l'évènement : $(\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2))$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. X_1 suit la loi géométrique de paramètre p, donc admet une espérance et une variance et

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad , \quad \mathrm{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p \quad , \quad E(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$$

On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. $(X_1 = k)_{k \geqslant 1}$ est un système complet d'évènements donc par formule des probabilités totales puis par indépendance de X_1 et X_2,

$$\mathrm{P}(\Delta = 0) = \mathrm{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = k)\,\mathrm{P}(X_2 = k)$$

puis avec la loi géométrique :

$$\mathrm{P}(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} [(1-p)^2]^{k-1} p^2 = p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p}.$$

3. Soit n un entier naturel non nul.

(a) On a
$$(X_1 - X_2 = n) = (X_1 = X_2 + n)$$
et avec le système complet d'évènements $(X_2 = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les probabilités totales donnent :
$$\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}((X_2 = k) \cap (X_1 = n + k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k)$$
par indépendance de X_1 et X_2.

(b) Par symétrie on a
$$\mathrm{P}(X_2 - X_1 = n) = \mathrm{P}(X_1 - X_2 = n)$$
De plus
$$(\Delta = n) = (X_1 - X_2 = n) \cup (X_2 - X_1 = n)$$
évènements incompatibles car $n \neq 0$ donc
$$\mathrm{P}(\Delta = n) = \mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) + \mathrm{P}(X_2 - X_1 = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n + k)$$
$$\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n+k-1}p = 2p^2(1-p)^{n-2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k}$$
et enfin
$$\mathrm{P}(\Delta = n) = 2p^2(1-p)^{n-2}(1-p)^2\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{2p^2q^n}{(1-q)(1+q)} = \frac{2pq^n}{1+q}.$$

4. (a) Sous réserve de convergence absolue,
$$E(\Delta) = 0 \times \frac{p}{2-p} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{2pq^n}{1+q} = 2\frac{pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$$
On reconnait une série géométrique dérivée qui converge absolument, donc Δ admet une espérance et
$$E(\Delta) = 2\frac{pq}{1+q} \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2pq}{(1+q)p^2} = \frac{2q}{p(1+q)} = \frac{2q}{(1-q)(1+q)} = \frac{2q}{1-q^2}.$$

(b) On développe :
$$E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) - 2E(X_1)E(X_2)$$
par indépendance de X_1 et X_2 et par suite :
$$E((X_1 - X_2)^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 + V(X_1) + E(X_1)^2 - 2E(X_1)^2$$
car X_1 et X_2 suivent la même loi. Enfin
$$E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1).$$
D'où $\Delta^2 = (X_1 - X_2)^2$ admet une espérance et
$$E(\Delta^2) = 2V(X_1)$$
donc Δ admet une variance, qui vaut
$$V(\Delta) = \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{(1-q^2)^2}.$$

5. $|X_2 - X_1|$, valeur absolue de la différence, est égale à la différence de la plus grande et de la plus petite des deux donc :
$$\Delta = |X_1 - X_2| = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$$
et par suite :
$$(X_3 > \Delta) = [X_3 + \min(X_1, X_2) > \max(X_1, X_2)] = A$$

6. (a) Avec le système complet d'évènements $(\Delta = k)_{k\in\mathbb{N}}$ la formule des probabilités totales donne alors :

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}((\Delta = k) \cap (X_3 > k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k)$$

car $\Delta = |X_1 - X_2|$ et X_3 sont indépendantes avec les variables X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X_3 > k) = q^k$$

car cela correspond au fait que le premier succès de la loi géométrique soit rencontré après la k-ème épreuve, c'est-à-dire que les k premières épreuves ont donné des échecs (on peut aussi le calculer par une somme). Donc

$$\mathrm{P}(A) = \frac{p}{2-p} \times q^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2pq^k}{1+q} \times q^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \times q^2 \times \frac{1}{1-q^2}$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{p}{1+q}\left(1 + \frac{2q^2}{1-q^2}\right) = \frac{p}{1+q} \times \frac{1-q^2+2q^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}.$$

7. **Informatique :**

(a) **Première méthode de calcul de f :**

```
p=input('Entrer p : ')
q=1-p

X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)

N=0
for k=1:10000 do
    if X3(k) > abs(X2(k)-X1(k)) then
        N=N+1
    end
end
f=N/10000

P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,"fréquence de A :")
disp(P, "proba de A : ")
```

(b) **Deuxième méthode de calcul de f :**

```
p=input('Entrer p : ')
q=1-p

X1=grand(1,10000,'geom',p)
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)

f=sum(X3>abs(X2-X1))/10000

P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,"fréquence de A :")
disp(P, "proba de A : ")
```

(c) **Troisième méthode de calcul de f :**

```
p=input('Entrer p : ')
q=1-p

X1=grand(1,10000,'geom',p)
```

```
X2=grand(1,10000,'geom',p)
X3=grand(1,10000,'geom',p)

f=length(find(X3>abs(X2-X1)))/10000

P=(1+q^2)/((1+q)^2)
disp(f,"fréquence de A :")
disp(P, "proba de A : ")
```

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0;+\infty[$. On note $q = 1-p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}((X=k) \cap (Y \leqslant t)) = \mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y \leqslant t)$$

1. Une densité de Y est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   De plus Y admet une espérance et une variance et

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. On définit la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y}{X}$.

   (a) On utilise le système complet d'évènements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   La formule des probabilités totales, donne pour $t \geqslant 0$ (on se ramène aux variables X et Y dont on connaît l'indépendance) :

$$\mathrm{P}(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left[\left(\frac{Y}{X} \geqslant t\right) \cap (X=k)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left[\left(\frac{Y}{k} \geqslant t\right) \cap (X=k)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left[(Y \geqslant kt) \cap (X=k)\right]$$

   et par indépendance

$$\mathrm{P}(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y \geqslant kt)\,\mathrm{P}(X=k)$$

   (b) Calculons avec les lois connues :

$$\mathrm{P}(Z \geqslant t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big[1 - \mathrm{P}(Y \leqslant kt)\Big] \times q^{k-1}p = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda kt} q^{k-1} p = pe^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(qe^{-\lambda t}\right)^{k-1}$$

   On reconnaît la somme d'une série géométrique convergente avec $0 < qe^{-\lambda t} < 1$:

$$\mathrm{P}(Z \geqslant t) = pe^{-\lambda t} \frac{1}{1-qe^{-\lambda t}} = \frac{pe^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}$$

   (c) On ne donne rien sur F_Z pour les valeurs négatives ; on va alors d'abord chercher la valeur en 0 et essayer de conclure avec les propriétés de la fonction de répartition :

   Comme X ne prend que des valeurs strictement positives,

$$\mathrm{P}(Z \leqslant 0) = \mathrm{P}\left(\frac{Y}{X} \leqslant 0\right) = \mathrm{P}(Y \leqslant 0) = 0$$

   donc par croissance et positivité de F_Z, pour tout $x < 0$,

$$0 \leqslant P(Z \leqslant x) \leqslant P(Z \leqslant 0) = 0 \qquad \text{donc} \qquad F_Z(x) = 0$$

Pour $x \geqslant 0$ on a $F_Z(x) = 1 - \mathrm{P}(Z > t)$.

Grosse erreur d'énoncé ici (on aurait du faire calculer depuis le début $\mathrm{P}(Z > t)$) : la variable n'est pas encore à densité donc on ne peut pas affirmer que $\mathrm{P}(Z > t) = \mathrm{P}(Z \geqslant t)$.

En toute rigueur il faut calculer :

$$\mathrm{P}(Z = t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = kt)\,\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

(sur le modèle des questions précédentes.)

On en déduit bien que

$$\mathrm{P}(Z > t) = \mathrm{P}(Z \geqslant t) \qquad \text{et} \qquad F_Z(t) = \frac{1 - qe^{-\lambda t} - pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$$

Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc F_Z est de classe C^1 sauf peut-être en 0, donc continue sauf peut-être en 0.

On vérifie la continuité en 0 :

$$\lim_{t \to 0^+} F_Z(t) = \lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}} = \frac{1 - 1}{1 - q} = 0 = F_Z(0)$$

et

$$\lim_{t \to 0^-} F_Z(t) = \lim_{t \to 0} 0 = 0 = F_Z(0)$$

donc F_Z et continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$.

La variable Z est donc à densité, et on obtient une densité en dérivant $_Z$ sauf au point 0 où elle n'est pas de classe C^1, et où on donne une valeur arbitraire :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda p e^{-\lambda t}}{(1 - qe^{-\lambda t})^2} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

car pour tout $t > 0$,

$$F_Z'(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - qe^{-\lambda t}\right) - \lambda q e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(1 - q)}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{\lambda p e^{-\lambda t}}{\left(1 - qe^{-\lambda t}\right)^2}.$$

3. **Informatique :** Dans cette question on choisit $p = 1/3$ et $\lambda = 1$.

   (a)
   ```
   p=1/3
   lambda=1
   X=grand(1,10000,'geom',p)
   Y=grand(1,10000,'exp',lambda)
   Z=Y./X

   x=[0:0.1:10]
   histplot(x,Z)
   plot(x,lambda*p*exp(-lambda*x)./((1-(1-p)*exp(-lambda*x)).^2))
   ```

   (b) La fréquence de chaque classe est très proche de l'aire sous la courbe de la densité sur cette classe ce qui illustre la converge des fréquences d'un évènement E vers la probabilité de E lorsque le nombre de simulations tend vers $+\infty$.