Devoir maison n° 12

A rendre le Mardi 17 Mars 2020

Exercice 1.
Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I - Etude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Etablir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$.

   On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 e^x$,
   et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II - Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III - Etude d'une série

6. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.

8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie IV - Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe C^2 suivante :

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

10. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Justifier que f n'est pas bijectif. En déduire, *sans le moindre calcul*, une valeur propre de f.
3. Prouver que u et v sont deux vecteurs propres de f.
   Préciser la valeur propre λ (respectivement μ) associée à u (respectivement à v).
   Donner la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ (respectivement $E_\mu(f)$).
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
5. Rechercher tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :
$$f(t) = t + v$$
6. Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est nulle, telle que la famille $C = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base C soit la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que :
$$f \circ g = g \circ f$$
   En déduire que :
$$f(g(u)) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = g(v)$$
2. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
3. On note N la matrice de g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6. Justifier que :
$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$
   où a et b sont les deux réels définis à la question précédente (II.2) et c, d, e des réels.
4. Existe-t-il des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g \circ g = f$?
   Indication : Utiliser les matrices de f et g dans la base $C = (u, v, w)$ définie à la question I.6.

Exercice 3.
Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $P(Y=1) = P(Y=-1) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X \leq x] \cap [Y=1]) = P(X \leq x)\, P(Y=1) \quad \text{et} \quad P([X \leq x] \cap [Y=-1]) = P(X \leq x)\, P(Y=-1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
2. En utilisant le système complet d'évènements $\{(Y=1), (Y=-1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : Etude de deux premiers exemples.

1. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.

   (a) **Informatique :**

   i. Compléter le programme suivant qui effectue 10000 simulations de la variable Z et affiche le diagramme en bâton des fréquences des classes modales $[-5; -4,9]$, $[-4,9; -4,8]$.....$[4,9; 5]$.

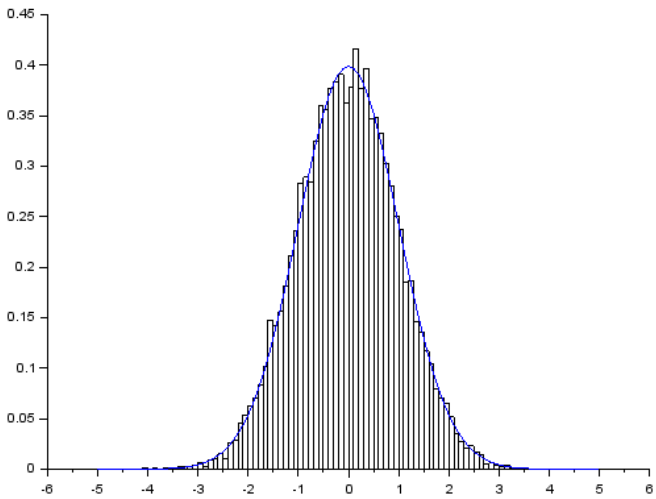
```
X=grand(1,10000,'nor',*********,**********)
Y= grand(1,10000,'uin',0,1)
Y=2*Y-1
Z=************
x=-5:0.1:5
histplot(x,Z)
```

   ii. Expliquer pourquoi les instructions :

```
Y= grand(1,10000,'uin',0,1)
Y=2*Y-1
```

   simulent bien 10000 uniformes sur $\{-1; 1\}$.

   iii. On rajoute l'instruction `plot2d(x, 1/sqrt(2*%pi)*exp(-x.^2/2),style=2)` et on exécute. On obtient le graphique suivant :



Conjecturer la loi de Z.

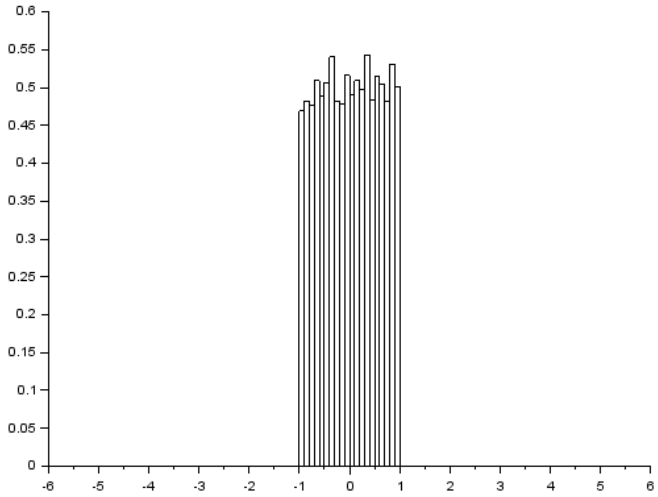
(b) Prouver la conjecture précédente.

2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(a) **Informatique :** Compléter le programme suivant qui effectue 10000 simulations de la variable Z et affiche le diagramme en bâton des fréquences des classes modales $[-5; -4,9]$, $[-4,9; -4,8]$.....$[4,9; 5]$.

```
X=grand(1,10000,'unf',*********,**********)
Y= grand(1,10000,'uin',0,1)
Y=2*Y-1
Z=************
x=-5:0.1:5
histplot(x,Z)
```

Après exécution, on obtient le graphique :



Conjecturer la loi de Z.

(b) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

(c) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : Etude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. (a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

   (c) Etablir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

   (d) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

   (e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

2. (a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$.

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

3. (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

   (b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

4. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

   (a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

   (b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

   (c) Informatique.
   En tenant compte des résultats des questions 4a) et 4b), écrire en `Scilab` une déclaration de fonction dont l'en-tête est `function z=sumulation_Z()` pour qu'elle simule une variable aléatoire suivant la loi de Z.

Exercice supplémentaire

Exercice 4.
Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 xe^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

   (a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} h(x)dx$ puis donner sa valeur.

   (b) Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.

   (c) Montrer la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} xh(x)dx$ puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f, nulle sur $]-\infty; 0[$, continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive sur $[0; +\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y.
   Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - F(x) > 0$.
   On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. (a) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $[0;+\infty[$.

(c) En remarquant que, si l'on pose $u'(x) = -f(x)$, on peut choisir $u(x) = 1 - F(x)$, montrer grâce à une intégration par parties que $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ est une intégrale convergente et que $\int_0^{+\infty} g(x)dx = 1$.

(d) Etablir que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z.

(e) Étude d'un cas particulier.
Vérifier que la variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que Z suit la même loi que X.