Indications du devoir maison n° 12

Exercice 1.
Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I - Etude d'une fonction

1. "dresser le tableau de variations " (contrairement à "étudier les variations") signifie donner aussi les limites et les valeurs minimales et maximales locales.
   Il faut toujours bien TOUT justifier : les variations, mais aussi chacune des limites (même simples).

2. • attention à LEVER LA TÊTE : utiliser les résultats de la question précédente pour répondre à cette question.

   • Pour montrer que $\alpha \in]a, b[$, comme α est implicite (on ne connait pas sa valeur) mais que l'on connait $\varphi(\alpha)$, il faut d'abord comparer $\varphi(a)$, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(b)$ puis en déduire un encadrement de α (par stricte monotonie de φ^{-1}).

Partie II - Etude d'une suite

3. (u_n) est une suite récurrente donc on fait une récurrence (il est judicieux de vérifier que l'on sait prouver que $[1; +\infty[$ est un intervalle stable par f avant de se lancer dans la récurrence) .

4. On écrit $u_{n+1} - u_n$ uniquement en fonction de u_n et on cherche son signe (on fera encore attention à LEVER LA TÊTE i.e. à utiliser un résultat de la partie I).

5. Méthode de suites récurrentes : on recherche les limites finies POSSIBLES : i.e. on suppose que (u_n) a une limite L puis on passe à la limite dans l'égalité de récurrence et dans les inégalités et on résout pour en déduire un minimum de limites possibles aucune limite ou 1 seule limite).
   Il y a alors 2 cas :
   - soit il n'y a aucune limite finie possible alors par thm de la limite monotne on conclut que la limite est infinie.
   - soit il y a une limite finie possible, dans ce cas il faut prouver par thm de la limite monotone qu'elle converge ; elle convergera alors forcément vers la seule limite possible.

Partie III - Etude d'une série

6. On demande juste sa nature donc : théorèmes de comparaison !

7. Découper S pour mettre $S - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ sous forme d'une somme puis majorer cette somme par une somme que vous savez calculer (série géométrique ou exponentielle donc, pas bcp le choix !)

8.

Partie IV - Etude d'une fonction de deux variables

On considère l'ouvert $U =]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe C^2 suivante :

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y$$

9.

10. Il faut calculer la dérivée de g par rapport à x, notée $\partial_1 g(x, y)$ i.e. dériver en considérant x comme la variable et y comme une constante ;
    puis calculer la dérivée de g
    rapport à y, notée $\partial_2 g(x, y)$ i.e. dériver en considérant y comme la variable et x comme une constante ;

11. Les points critiques sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 g(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 g(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$

12. Calculer les dérivées partielles secondes $\partial^2_{1,1}g(x,y)$, $\partial^2_{1,2}g(x,y)$, $\partial^2_{2,2}g(x,y)$ puis donner la matrice hessienne $\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}g & \partial_{1,2}g \\ \partial_{1,2}g & \partial_{2,2}g \end{pmatrix}$ au point $(\alpha, 0)$: si elle a deux valeurs propres strictement positives : g a un minimum local en $(\alpha, 0)$, si elle a deux valeurs propres strictement négatives : g a un maximum local en $(\alpha, 0)$, si elle sont de signe opposé : g n'a pas d'extremum local en $(\alpha, 0)$.

13. Idem : on calcule la matrice hessienne et on conclut.

14. -Si g n'a pas d'extremum local, alors il n'y a pas d'extremum global (car un extremum global est forcément local) ;
- Si g a un extremum local : on vérifie si il est aussi global : d'abord, on vérifie si certaines valeurs ou limites prouvent que ce n'est pas le minimum de la fonction, sinon, on prouve que ça l'est en montrant que $\forall (x,y) \in U$, $g(x,y) \geqslant g(\alpha, 0)$.

Exercice 2.
Dans cet exercice, on ne connaît pas f mais que la matrice de f donc on traduit toutes les questions matriciellement pour pouvoir y répondre.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. • A est la matrice de f dans une base donc on cherche $\operatorname{Ker} A$ en résolvant l'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis on en déduit $\operatorname{Ker} f$ car on connait les solutions matricielles i.e. les coordonnées des solutions dans la base canonique.

   • Pour l'image, on utilise la propriété : $Im\ f$ est l'espace vectoriel engendré par les images d'une base.

2. on connait $\operatorname{Ker} f$....donc on peut répondre sans calculs.

3. • Passer par le calcul matriciel : Donnez la valeur de $X = \mathcal{M}at_{Bc}(u)$ puis vérifiez que AX est colinéaire à X.

   PIEGE : Attention à ne pas faire de conclusion trop hâtive sur la dimension des s.e.p ! Soyez sûrs d'avoir prouvé vos affirmations.

4. PIEGE : pas de conclusion trop hâtive. Soyez sûrs de connaître tous les éléments propres de f.

5. Résoudre l'équation matriciellement : on résout $AX = X + V$ où X est l'inconnue et $V = Mat_{Bc}(v)$ est connue (donner sa valeur).

6. • Lire les informations sur la matrice T : que doivent valoir $f(u)$? $f(v)$? $f(w)$? ;
   déterminer alors des vecteurs u, v et w qui conviennent (il n'y a aucun calcul à faire, tout a été fait dans les questions précédentes).

   • Ne pas oublier de vérifier que les vecteurs u, v et w que vous avez choisis forment bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. • Question classique (plutôt posée sur des matrices habituellement) : utiliser l'information $g \circ g = f$ pour calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

   • $f(g(u)) = f \circ g(u) = ...$ 'utiliser la question précédente et ce que vous savez sur $f(u)$ d'après la partie précédente.
   Idem pour $f(g(v))$.

2. Comment traduire l'information $f(g(u)) = 0$? cela signifie que $g(u)$ appartient à quel ensemble pour f ? Connaissez vous cet ensemble ? une base de cet ensemble ? (utiliser la partie I) Que pouvez-vous donc dire de $g(u)$?

   Idem pour $g(v)$! Utiliser l'information $f(g(v)) = g(v)$ et utiliser la partie I.

3. Il suffit d'utiliser les informations de la question précédente.

4. On connait leurs matrices : traduire la question matriciellement et résoudre l'équation.
   Toujours choisir la base dans laquelle les matrices sont simples.

Exercice 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1. Formules de cours. Ne pas confondre densité et fonction de répartition.

2. La méthode donnée par l'énoncé est très claire, et bien connue : pour obtenir la probabilité d'un évènement qui dépend de deux variables aléatoires, on utilise les probas totales ; comme ici seule une des deux variables donne un sce, on n'a pas le choix.

   Ensuite on calcule les probabilités des intersections en se ramenant à X et Y qui sont indépendantes.

Partie 2 : Etude de deux premiers exemples.

1. (a)
   (b) On remplace donc F_X par Φ, il faut alors connaître les propriétés de Φ, et notamment $\Phi(-x)$ en fonction de $\Phi(x)$ pour simplifier et reconnaître une loi usuelle.

2. (a)
   (b) Donner précisément l'expression en remplaçant x par $-x$ partout et dans les 3 cas, puis en résolvant les inégalités sur $-x$ pour les réécrire sur x et donner une expression utilisable.

   (c) Séparer en autant de cas que nécessaire pour effectuer le calcul (a priori, il y en a quatre).

Partie 3 : Etude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. (a) Comme lors des deux cas précédents, on commence par déterminer précisément $F_X(-x)$ pour pouvoir faire le calcul avec autant de cas que nécessaire.

   (b) On le prouve proprement avec la fonction de répartition : classe C^1 sauf en quelques points et continuité sur $\mathbb{R}$.

   Penser à utiliser l'expression de F_Z en fonction de F_X qui a les bonnes propriétés car X est à densité : cela évite tout calcul.

(c) Attention à bien signaler qu'on ne dérive pas au(x) point(s) problématique(s) mais qu'on donne une valeur arbitraire.

Il y a deux cas pour F_Z donc on fait deux cas pour la dérivée, et on vérifie qu'on obtient à chaque fois la valeur demandée.

(d) On veut la valeur d'une intégrale généralisée (l'énoncé semble faire fi de la convergence) : on peut revenir à l'intégrale partielle ou utiliser une intégrale usuelle (moment d'une loi usuelle à densité).

Ici on reconnaît une intégrale usuelle, ce qui permet de conclure beaucoup plus vite (l'intégrale partielle nécessite une IPP un peu lourde puis des limites très propres).

(e) Pour la parité, on n'oublie pas de signaler que l'intervalle de définition est centré en 0.

Ensuite on en déduit proprement la parité de la fonction considérée pour l'espérance, puis l'existence de $E(Z)$ avec une convergence absolue, puis sa valeur.

2. (a) A nouveau, une intégrale usuelle permet de conclure beaucoup plus vite qu'avec le calcul de l'intégrale partielle.

Par contre l'intégrale demandée n'est pas une variance mais un moment d'ordre deux, qu'il faut calculer en fonction d'une espérance et d'une variance connues avec le théorème de Koenig-Huyghens utilisé "à l'envers".

(b) Ne pas oublier de déterminer la parité de la nouvelle fonction intégrée pour se ramener sur $\mathbb{R}_+$, puis de justifier la convergence absolue avant de calculer la valeur du moment d'ordre deux.

On calcule ensuite la variance avec Koenig-Huyghens.

3. (a) Le calcul est évident. Le résultat à retrouver est celui qui lie $E(XY)$ à $E(X)E(Y)$ dans un cas particulier (en effet dans le cours il n'est valable que pour des variables discrètes, et ici l'une des deux est à densité).

(b) Revenir à la définition de Z, et remarquer que U^2 est très très simple.

4. (a) Question classique mais difficile : on passe par la fonction de répartition, et on fait attention quand on compose par une fonction que la composition soit bien valable.

Si la composition n'est pas possible pour certaines valeurs de x, penser à remarquer que l'évènement est certain ou impossible.

(b) La variable est discrète, $R(\Omega)$ est donc la première étape pour la loi.

Ensuite on calcule deux probabilités a priori évidentes, en se ramenant à la variable connue : U.

(c) Question pas évidente : il faut d'abord simuler X et Y en se servant des question précédentes, puis Z a priori sans difficulté à partir de X et Y.

Exercice supplémentaire

Exercice 4.

1. (a) Pour obtenir la convergence et la valeur d'une intégrale généralisée, on obtient les points où elle est généralisée avec l'intervalle où la fonction intégrée est continue, puis on revient à l'intégrale partielle ou on utilise un moment de loi usuelle ou une intégrale déjà calculée. Attention à bien poser la loi en question et sa densité....

   (b) Ultra classique : attention à ne rien oublier : continuité sauf..., positivité, séparation de l'intégrale, cas de la fonction nulle, continuité des fonctions intégrées pour savoir en quels points les intégrales sont généralisées, calcul et valeur d'une intégrale généralisée par l'intégrale partielle ou une intégrale usuelle ou une intégrale déjà calculée, calcul direct des intégrales sur des segments, conclusion à la convergence de l'intégrale avant sa valeur.

   (c) La méthode pour le calcul de l'intégrale est strictement la même qu'à la question 1a. Ensuite, toujours aussi classique : bien séparer puis vérifier la généralisation des intégrales, ne pas oublier la fonction nulle, ne pas oublier de conclure à la convergence absolue, convergence absolue d'une intégrale généralisée obtenue en se ramenant à la convergence simple par le signe, convergence simple et valeur d'une intégrale généralisée ont déjà été vus, convergence absolue d'une intégrale sur un segment immédiate.

2. Cette question classique à l'Essec n'est pas forcément évidente. On cherche un signe, la méthode est cependant bien connue ! On étudie la fonction et on conclut.

3. (a) A nouveau, on veut un signe et on applique la méthode habituelle.

   (b) Sur des intervalles où la fonction a la même définition, on utilise les opérations élémentaires. Attention, on ne demande pas la continuité en 0 mais seulement la continuité à droite (on n'a donc pas à traiter 0 comme un point particulier).

   (c) On veut la convergence et la valeur d'une intégrale, on revient à l'intégrale partielle ou on utilise un moment de loi usuelle ou de loi déjà étudiée ou encore une intégrale déjà étudiée. D'autre part, une IPP ne peut être réalisée que sur des intégrales sur un segment.

   (d) Ne rien oublier ; tout a déjà été prouvé.

   (e) Inutile de prouver le résultat de la question 2, seulement que les **hypothèses** sont vérifiées. Ensuite on connaît F et f donc on remplace et on explicite g pour conclure.