Correction du devoir maison n° 12

Exercice 1. : EML 2015

Partie I - Etude d'une fonction

1. φ est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	$4e^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

avec, par opérations élémentaires,

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty \quad , \quad \varphi(0) = 0-1 = -1 \quad , \quad \varphi(-2) = (-2)^2e^{-1} - 1 = 4e^{-2} - 1$$

et enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 - 1 = -1.$$

2. Pour $x \in]0;+\infty[$, on a

$$e^x = \frac{1}{x^2} \iff x^2e^x = 1 \iff x^2e^x - 1 = 0 \iff \varphi(x) = 0.$$

Or φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue (puisque dérivable), donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]\varphi(0); \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[=]-1;+\infty[$.

Enfin $0 \in]-1;+\infty[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, et par équivalence l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$ également.

Enfin comme α est défini par $\varphi(\alpha) = 0$, on compose par φ pour le comparer à $1/2$ et 1 :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{1/2} - 1 = \frac{e^{1/2}}{4} - 1 = \frac{e^{1/2} - 4}{4}.$$

Or on sait que l'exponentielle est croissante, donc $e^{1/2} \leqslant e^1 = e < 4$, donc $e^{1/2} - 4 < 0$ et $\varphi(1/2) < 0$. D'autre part :

$$\varphi(1) = 1^2e^1 - 1 = e - 1 > 0$$

donc par stricte croissance de φ,

$$\varphi(1/2) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(1) \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

et on a bien $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.

Partie II - Etude d'une suite

3. On montre cette inégalité par récurrence sur $n \geqslant 1$:

   - **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1 \geqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

   - **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $u_n \geqslant 1$, alors par croissance de la fonction cube et de l'exponentielle puis par produit :

   $$u_n^3 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad e^{u_n} \geqslant e \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = u_n^3 e^{u_n} \geqslant 1 \times e = e \geqslant 1$$

   et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   - **Conclusion** : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 1$.

4. Pour tout $n \geqslant 0$,

   $$u_{n+1} - u_n = u_n^3 e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2 e^{u_n} - 1) = u_n \varphi(u_n).$$

   Or on sait que $u_n \geqslant 1 \geqslant \alpha \geqslant 0$, donc $u_n \geqslant 0$ et par croissance de φ,

   $$\varphi(u_n) \geqslant \varphi(\alpha) = 0$$

   et enfin par produit, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est croissante.

5. On cherche les limites possibles de (u_n) : si (u_n) converge vers ℓ, par continuité de f, ℓ est solution de l'équation :

   $$f(\ell) = \ell \iff \ell^3 e^\ell = \ell \iff \ell(\ell^2 e^\ell - 1) = 0 \iff \ell\varphi(\ell) = 0$$

   qui donne $\ell = 0$ ou $\varphi(\ell) = 0 \iff \ell = \alpha$. Or on sait que $u_n \geqslant 1 > \alpha > 0$, donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0 ni vers α : elle est donc divergente.

   Enfin puisque (u_n) est croissante, elle diverge forcément vers $+\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie III - Etude d'une série

6. La série est à termes positifs donc le théorème de comparaison s'applique. On n'a pas d'équivalent plus simple possible, on teste la négligeabilité :

   $$\frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{ne^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{0}$$

   donc $\frac{1}{f(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par théorème de comparaison, la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$ converge (absolument).

7. On remarque que les sommes se simplifient (un peu) :

   $$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} \right|$$

   La somme est à termes positifs, donc elle est positive et la valeur absolue peut être retirée :

   $$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k}.$$

   Il faut maintenant majorer cette série par une série dont on sait calculer la somme : pour cela il faut retirer le k^3 pour obtenir une série géométrique. On sait que

   $$k \geqslant n+1 \quad \text{donc} \quad k^3 \geqslant (n+1)^3 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{(n+1)^3}$$

par croissance de la fonction cube et décroissante de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. On multiplie par $\frac{1}{e^k}W0$ et on somme :

$$\begin{aligned}\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right| &\leqslant \frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &= \frac{1}{(n+1)^3}\times\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{(n+1)^3e^{n+1}\left(1-\frac{1}{e}\right)} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3e^n(e-1)}.\end{aligned}$$

Enfin comme $n\geqslant 1$, alors $n+1\geqslant 2$ et $(n+1)^3\geqslant 8\geqslant 1$, et $\frac{1}{(n+1)^3}\leqslant 1$ donc :

$$\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|\leqslant\frac{1}{e^n(e-1)}.$$

8. On veut que l'écart entre S et la somme partielle soit inférieur à 10^{-4}, il faut alors vérifier que :

$$\frac{1}{(e-1)e^n}\leqslant 10^{-4}\iff e^n\geqslant\frac{10^4}{e-1}\iff n\geqslant 4\ln(10)-\ln(e-1)$$

et comme n est un entier, il faut que :

$$n\geqslant\lfloor 4\ln(10)-\ln(e-1)\rfloor+1.$$

Enfin on calcule la somme partielle jusqu'à ce terme, en ajoutant un par un les termes de la somme

```
n=floor (4*log(10)-log(exp(1)-1))+1
S=0
for i=1:n do
   S=S+(1/(k^3*exp(k)))
end
```

Partie IV - Etude d'une fonction de deux variables

9. On trace un repère, et on hachure la partie du plan à droite de l'axe des ordonnées (tels que $x>0$).

10. g est de classe C^2 sur U, et on a :

$$\partial_1(g)(x,y)=-\frac{1}{x^2}+e^x \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x,y)=-2ye^y-y^2e^y=-ye^y(2+y).$$

11. On résout le système :

$$\begin{cases}\partial_1(g)(x,y)=0\\ \partial_2(g)(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}-\frac{1}{x^2}+e^x=0\\ -ye^y(2+y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=\alpha\\ y=0 \quad \text{ou} \quad y=-2\end{cases}$$

en se servant de la première partie pour la première équation. On en déduit que g admet deux points critiques sur U : $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$.

12. On cherche les dérivées partielles secondes de g :

$$\partial_{1,1}^2(g)(x,y)=\frac{2}{x^3}+e^x \quad , \quad \partial_{1,2}^2(g)(x,y)=\partial_{2,1}^2(g)(x,y)=0$$

et

$$\partial_{2,2}^2(g)(x,y)=-2e^y-2ye^y-2ye^y-y^2e^y=-(y^2+4y+2)e^y.$$

On cherche alors la matrice Hessienne au point $(\alpha,0)$:

$$\nabla^2(g)(\alpha,0)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\alpha^3}+e^\alpha & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1 = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -2 < 0$$

donc elles sont de signes (stricts) opposés, et $(\alpha, 0)$ est un point-selle, g n'admet pas d'extremum local en ce point.

13. Au point $(\alpha, -2)$, on a :

$$\nabla^2(g)(\alpha, -2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales,

$$\lambda_1 = \frac{2}{\alpha^3} + e^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2e^{-2} > 0$$

donc elles sont de même signe (strict), et g admet un extremum local en ce point (c'est un minimum puisque les valeurs propres sont positives).

14. Si g admet un extremum global, ce serait également un extremum local, donc d'après les question précédentes, ce ne peut être qu'un minimum, et il ne peut être atteint qu'en $(\alpha, -2)$.

    Cependant on peut remarquer que lorsque y tend vers $+\infty$ (avec x fixé), la fonction $y \mapsto g(x, y)$ a pour limite $-\infty$: elle ne peut donc être minorée, et la fonction g ne l'est pas : elle n'admet donc aucun minimum global, donc aucun extremum global.

Exercice 2. : ecricome 2014
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. En utilisant la base canonique, on sait que

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}[f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$$

Or d'après la matrice A de f dans cette base, on remarque que :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3 = (1, 1, 2) = f_1$$

et de même :

$$f(e_2) = (0, 2, -2) = f_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = (0, 1, -1) = f_3$$

et enfin comme $(0, 2, -2) = 2(0, 1, -1)$ on obtient :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}[(1, 1, 2)(0, 2, -2), (0, 1, -1)] = \mathrm{Vect}[(1, 1, 2), (01, -1)] = \mathrm{Vect}[f_1, f_3]$$

La famille (f_1, f_3) est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, et libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$, qui est de dimension 2.

Pat théorème du rang, $\operatorname{Ker} f$ est alors de dimension 1 (car $\dim \mathbb{R}^3 = 3$) ; or on a vu que $f(e_2) = 2f(e_3)$ donc par linéarité :

$$f(e_2 - 2e_3) = f(e_2) - 2f(e_3) = 0 \quad \text{donc } e_2 - 2e_3 = (0, 1, -2) = u \in \operatorname{Ker} f$$

La famille (u) est libre car constituée d'un seul vecteur non nul, et a un cardinal égal à 1, qui est la dimension de $\operatorname{Ker} f$, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

Remarque : on pouvait bien entendu calculer $\operatorname{Ker} f$ en résolvant le système $AX = 0$ (en faisant attention de bien conclure avec des vecteurs en colonnes pour $\operatorname{Ker} A$ puis des vecteurs en ligne pour $\operatorname{Ker} f$).

2. Le noyau de f n'est pas réduit à $\{0\}$, donc f n'est pas injectif, et par conséquent pas bijectif. On en déduit que $f - 0\,\mathrm{id} = f$ n'est pas bijectif, et enfin que 0 est une valeur propre de f.

   Remarque : on peut conclure de manière équivalente en signalant que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ (leurs dimensions diffèrent).

3. On a vu que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u)$, donc $f(u) = 0$, et $u \neq 0$ donc u est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

   Enfin le sous-espace propre associé $E_0(f)$ est égal à $\operatorname{Ker} f$, donc $E_0(f) = \operatorname{Vect}(u)$, de dimension 1.

   D'autre part on calcule $f(v)$ à l'aide de la matrice A :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(v) = v$$

   et $v \neq 0$, donc v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

   Pour calculer $E_1(f)$, on passe par $E_1(A)$ et on résout l'équation, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$(A - I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   donc on en déduit que

$$\mathrm{E}_1(A) = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{donc} \quad E_1(f) = \operatorname{Vect}(v)$$

   et la famille (v) est génératrice de $E_1(f)$ et libre car constituée d'un seul vecteur, non nul, donc c'est une base de $E_1(f)$, qui est de dimension 1.

   Remarque : on pouvait conclure beaucoup plus rapidement : on remarque que

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   est de rang 2 car les colonnes 2 et 3 dont égales, mais les colonnes 1 et 2 ne sont pas colinéaires (l'image de $A - I$ est engendrée par les deux premières colonnes, qui donnent une famille libre). Par théorème du rang, $\operatorname{Ker}(A - I) = E_1(A)$ est de dimension 1, donc $E_1(f)$ également.

   Remarque 2 : on peut même (ce n'est pas demandé) obtenir que $E_1(f) = \operatorname{Vect}(v)$ rapidement : (v) est une famille libre (un vecteur non nul) de $E_1(f)$, de cardinal égal à la dimension de $E_1(f)$ (c'est-à-dire 1) donc c'est est une base, et donc :

$$E_1(f) = \operatorname{Vect}(v)$$

4. Question très piégeuse : tout ce qui précède semble tendre à éviter les transformations sur $A-\lambda I$, et pourtant on ne peut pas les éviter ici. On connaît deux valeurs propres (0 et 1) et les sous-espaces propres associés de dimension 1, donc aucune condition suffisante ne s'applique, et la condition nécessaire ne permet pas de prouver que f n'est pas diagonalisable car on n'a pas vérifié l'existence d'autres valeurs propres....

   Il n'y a donc pas d'autre choix que de chercher **toutes** les valeurs propres, en considérant :

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 + (1+\lambda)L_3 \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3+\lambda & -2+(2-\lambda)(1+\lambda) & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

   La réduite de $A-\lambda I$ obtenue est triangulaire, donc $A-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul c'est-à-dire si

$$1-\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad -2+(2-\lambda)(1+\lambda) = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{0;1\}$$

   et on obtient finalement :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{0;1\}$$

   Enfin la somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut 2, et f est définie sur un espace de dimension 3, donc f n'est pas diagonalisable.

   Remarque : la forme de $A-\lambda I$ nous a conduit a annuler les coefficients au-dessus de la diagonale, plus rapide ici mais beaucoup moins classique. Les candidats qui ne maîtrisent pas cette technique pouvaient bien sûr annuler les coefficients sous la diagonale, mais les calculs sont beaucoup plus difficiles : une fois la première colonne réglée avec un échange des lignes 1 et 3 puis des pivots simples, les coefficients $(2,2)$ et $(3,2)$ dépendent tous deux de λ et ne sont pas colinéaires : il faut annuler les λ du coefficient (2,2) à l'aide du coefficient (3,2) pour pouvoir poursuivre, puis traiter à la fin un polynôme du troisième degré :

$$A-\lambda I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & 6-2\lambda & 3+\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & (1-\lambda)(1+\lambda) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & 4 & 3+\lambda-(1-\lambda)(1+\lambda) \\ 0 & 2-2\lambda & (1-\lambda)(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

   etc...

5. On passe par les matrices dans la base canonique :

$$f(t) = t+v \quad \Longleftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = x \\ x+2y+z = y+1 \\ 2x-2y-z = z-1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z = 1 \\ 2x-2y-2z = -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \left\{ \begin{array}{c} x+y+z = 1 \\ -4y-4z = -3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \left\{ \begin{array}{c} x = 1/4 \\ y = 3/4 - z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = (1/4, 3/4 - z, z) = (1/4, 3/4, 0) + zv$$

   et on en déduit que :

$$S = \{(1/4, 3/4 - z, z) = (1/4, 3/4, 0) + zv \text{ tels que } z \in \mathbb{R}\}$$

6. Pour que la matrice de f dans la famille (on vérifiera que c'est bien une base une fois w obtenu) (u, v, w) soit T, il faut que :

$$f(u) = 0 \ \ (\text{vrai}) \quad , \quad f(v) = v \ \ (\text{vrai}) \quad , \quad f(w) = v + w$$

   donc il faut et il suffit que w soit une solution de l'équation vectorielle de la question 5. Comme on veut que le 3e coefficient soit nul, il faut prendre $z = 0$ donc la seule solution est :

$$w = (1/4, 3/4, 0) = \frac{1}{4}(1, 3, 0)$$

La famille (u, v, w) a alors un cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire 3), il suffit de prouver qu'elle est libre :

$$au + bv + cw = 0 \iff \begin{cases} 1/4c = 0 \\ a + b + 3/4c = 0 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \iff (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

On en déduit que la famille $(u, v, w,)$ est bien libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de f est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f$$

1. On sait que $f = g \circ g$, donc :

$$g \circ f = g \circ g \circ g \quad \text{et} \quad f \circ g = g \circ g \circ g \quad \text{donc} \quad g \circ f = f \circ g$$

On en déduit alors que :

$$f(g(u)) = (f \circ g)(u) = (g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(g(v)) = (f \circ g)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(v)$$

où $g(0) = 0$ car g est linéaire.

2. On a vu que $f(g(u)) = 0$ donc $g(u) \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u)$ (partie I, question 1).

Par définition du sous-espace vectoriel engendré, cela signifie qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(u) = au$$

De même on a vu que $f(g(v)) = g(v)$ donc $g(v) \in \mathrm{E}_1(f) = \operatorname{Vect}(v)$ (partie I, question 2) et il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(v) = bv$$

3. On vient de voir que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$. De plus w est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, donc $g(w)$ également, il admet donc une unique décomposition sur la base (u, v, x) et il existe donc des nombres c, d et e tels que :

$$g(w) = cu + dv + ew$$

Finalement, la matrice N de g dans la base $\mathcal{C}$ est bien de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

4. En passant par les matrices dans la base $\mathcal{C}$, on a :

$$g \circ g = f \iff N^2 = T \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ac + ce \\ 0 & b^2 & bd + de \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela conduit à un système de 9 équations dont 4 sont trivialement vérifiées (0=0), et il reste :

$$\begin{cases} a^2 = 0 \\ c(a + e) = 0 \\ b^2 = 1 \\ d(b + e) = 1 \\ e^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 0 \\ ce = 0 \\ b = 1 \text{ ou } -1 \\ d(b + e) = 1 \\ e = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$$

On remarque que e n'est pas nul (il vaut 1 ou -1), donc $ce = 0$ donne $c = 0$ puis :

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \text{ ou } -1 \\ d(b+e) = 1 \\ e = 1 \text{ ou } -1 \end{cases}$$

qui se sépare en 3 possibilités :

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ 2d = 1 \\ e = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ d = 1/2 \\ e = 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ 0 = 1 \\ e = -1 \end{cases} \quad \text{(absurde)}$$

ou

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = -1 \\ -2d = 1 \\ e = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = -1 \\ d = -1/2 \\ e = -1 \end{cases}$$

et donc finalement :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N_1 \quad \text{ou} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -N_1$$

et il existe exactement deux endomorphismes g (les endomorphismes dont les matrices dans la base (u, v, w) dont N_1 et $-N_1$) tels que $g \circ g = f$.

Exercice 3. : edhec 2011

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Et si $X \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. $\big\{(Y = 1), (Y = -1)\big\}$ est un système complet d'événements, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ les probabilités totales donnent :

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = \mathrm{P}(Y = 1)\, \mathrm{P}_{(Y=1)}(Z \leqslant x) + \mathrm{P}(Y = -1)\, \mathrm{P}_{(Y=-1)}(Z \leqslant x)$$

On se ramène à X pour utiliser l'indépendance de X et Y et faire apparaître F_X :

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Y = 1)\, \mathrm{P}_{(Y=1)}(X \leqslant x) + \mathrm{P}(Y = -1)\, \mathrm{P}_{(Y=-1)}(-X \leqslant x)$$

On peut maintenant appliquer l'indépendance, puis on fait apparaître $P(X \leqslant \cdots)$:

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Y = 1)\, \mathrm{P}(X \leqslant x) + \mathrm{P}(Y = -1)\, \mathrm{P}(X \geqslant x)$$

et on utilise enfin la loi de Y et le passage au contraire :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{P}(X \leqslant x) + 1 - \mathrm{P}(X \leqslant -x)\right] = \frac{1}{2}\left[F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right]$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1. (a) **Informatique :**

   i. Compléter le programme suivant qui effectue 10000 simulations de la variable Z et affiche le diagramme en bâton des fréquences des classes modales $[-5;-4,9]$, $[-4,9;-4,8]$.....$[4,9;5]$.

   ```
   X=grand(1,10000,'nor',0,1)
   Y= grand(1,10000,'uin',0,1)
   Y=2*Y-1
   Z=X.*Y
   x=-5:0.1:5
   histplot(x,Z)
   ```

   ii. Chaque coefficient de `Y= grand(1,10000,'uin',0,1)` vaut 0 ou 1 (choisi au hasard). Donc chaque coefficient de $2Y-1$ vaut $2\times 0-1=-1$ ou $2\times 1-1=1$ (choisi au hasard). Au finalement on choisit donc 10000 nombres au hasard dans $\{-1;1\}$ donc 10000 uniformes sur $\{-1;1\}$.

   iii. Les fréquences de chaque classe modale sont très proches de l'aire sous la courbe de la densité d'une normale sur $[0;1]$. Z a donc l'air de suivre une loi normale sur $[0;1]$.

   (b) X est la loi normale centrée réduite, sa fonction de répartition est donc $F_X=\Phi$ et on sait que :

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

   Donc $\forall x\in\mathbb{R}$,

   $$F_Z(x)=\frac{1}{2}\big[\Phi(x)-(1-\Phi(x))+1\big]=\Phi(x)$$

   et Z suit la loi normale centrée réduite.

2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$

   (a)
   ```
   X=grand(1,10000,'unf',0,1)
   Y= grand(1,10000,'uin',0,1)
   Y=2*Y-1
   Z=X.*Y
   x=-5:0.1:5
   histplot(x,Z)
   ```

   On remarque que les classes modales sont de fréquence nulle en dehors de $[-1;1]$ et de même fréquence sur $[-1;1]$: Z semble suivre une loi unofrme sur l'intrevalle $[-1;1]$.

   (b) On a

   $$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}\qquad \text{donc}$$

   $$F_X(-x)=\begin{cases}0 & \text{si } -x<0\Leftrightarrow x>0\\ -x & \text{si } -x\in[0,1]\Leftrightarrow x\in[-1;0]\\ 1 & \text{si } -x>1\Leftrightarrow x<-1\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } x\in[-1,0]\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases}$$

   (c) On a $F_Z(x)=\frac{1}{2}(F_X(x)-F_X(-x)+1)$, il faut alors séparer 4 cas :

   - si $x<-1$,
   $$F_Z(x)=\frac{1}{2}(0-1+1)=0$$
   - si $x\in[-1,0]$,
   $$F_Z(x)=\frac{1}{2}(0--x+1)=\frac{1+x}{2}$$
   - si $x\in[0,1]$,
   $$F_Z(x)=\frac{1}{2}(x-0+1)=\frac{x+1}{2}$$
   - si $x>1$,
   $$F_Z(x)=\frac{1}{2}(1-0+1)=1$$

Finalement en rassemblant les deux cas du milieu :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et on reconnaît la fonction de répartition de $\mathcal{U}_{[-1,1]}$ donc

$$Z \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}.$$

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. (a) On a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad F_X(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -x < 0 \Longleftrightarrow x > 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$F_Z(x) = \frac{1}{2}(F_X(x) - F_X(-x) + 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[0 - (1 - e^x) + 1\right] & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x} - 0 + 1\right] & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) La fonction de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en 0.

Par opérations élémentaires, la fonction $x \to F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right)$ est également continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sauf peut-être en 0, et Z est bien une variable à densité.

N.B. On pouvait aussi (mais ça demandait un calcul explicite de limite en 0 pour la continuité) utiliser l'expression obtenue à la question a.

(c) On obtient alors une densité de Z en dérivant F_Z sauf aux points où elle n'est pas de classe C^1 (ici le point 0) où on donne une valeur arbitraire (on la rassemble avec un des deux cas, ici $x > 0$) :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

(d) On reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1 donc l'intégrale converge et :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx = \frac{1}{1} = 1.$$

(e) Le domaine de définition de f_Z, $\mathbb{R}$, est centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_Z(-x) = \frac{1}{2}e^{-|-x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|} = f_Z(x)$$

Donc f_Z est bien paire, et la fonction $x \to xf_Z(x)$ est donc impaire.

Or $\int_0^{+\infty} xf_Z(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx$ converge d'après 1)d) donc converge absolument car c'est une intégrale de fonction positive.

Par imparité $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\, dx$ converge absolument et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_Z(x)\, dx = 0$$

D'où Z admet une espérance et

$$E(Z) = 0.$$

2. (a) On reconnaît le moment d'ordre deux d'une loi exponentielle de paramètre 1.

   Avec $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$ on a par théorème de Koenig-Huyghens :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2.$$

   (b) f_Z est paire, donc la fonction $x \to x^2 f_Z(x)$ est paire.

   Or $\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx$ converge d'après 1)d) donc converge absolument car c'est une intégrale de fonction positive.

   Par imparité $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx$ converge absolument et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx = 2$$

   D'où par théorème de transfert Z^2 admet une espérance et une variance et avec Keonig-Huyghens :

$$E(Z^2) = 2 \quad \text{et } V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 2.$$

3. (a) X suit la loi exponentielle de paramètre 1 donc admet une espérance qui vaut 1 et Y est finie donc admet une espérance et :

$$E(Y) = -1\,\mathrm{P}(Y = -1) + 1\,\mathrm{P}(Y = 1) = 0 \quad \text{donc} \quad E(X)E(Y) = 0 = E(Z).$$

   On retrouve le résultat connu pour deux variables discrètes **indépendantes** : l'espérance du produit est le produit des espérances.

   (b) On a $Z^2 = X^2Y^2$ avec $Y = \pm 1$ donc $Y^2 = 1$ et $Z^2 = X^2$.

   On a donc avec Koenig-Huyghens :

$$E(Z^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2$$

   et

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 2.$$

4. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_Q(x) = \mathrm{P}(Q \leqslant x) = P(-\ln(1-V) \leqslant x) = P(1 - V \geqslant e^{-x}) = P(V \leqslant 1 - e^{-x}) = F_V(1 - e^{-x}).$$

   donc en remplaçant :

$$F_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-x} < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 1 - e^{-x} \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-x} > 1 \end{cases}$$

   On résout les inéquations :

$$1 - e^{-x} < 0 \Longleftrightarrow e^{-x} > 1 \Longleftrightarrow -x > 0 \Longleftrightarrow x < 0 \text{ donc } 1 - e^{-x} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$$

   et

$$1 - e^{-x} > 1 \Longleftrightarrow e^{-x} < 0 \text{ est absurde donc } 1 - e^{-x} \leqslant 1 \text{ est toujours vraie}$$

   et enfin :

$$F_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   On reconnaît alors la loi de Q : Q est une variable à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(b) R est une variable aléatoire discrète, avec $R(\Omega) = \{2 \times 0 - 1; 2 \times 1 - 1\} = \{-1; 1\}$ et :

$$\mathrm{P}(R = 1) = \mathrm{P}(2U - 1 = 1) = \mathrm{P}(2U = 2) = \mathrm{P}(U = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{P}(R = -1) = \mathrm{P}(2U - 1 = -1) = \mathrm{P}(U = 0) = \frac{1}{2}$$

(On reconnaît la loi de Y.)

(c) On simule $\mathcal{U}_{[0;1[}$ par v : = random et $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ par u :=random (2).

Ensuite on siume $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$ par q : = - ln (1 -v) et la loi de Y par r : = 2 u - 1.

Et enfin on a $Z = XY$ donc on la simule par $q \times r$.

```
function z=simulation_Z()
   v=rand() , q=-log(1-v)
   if rand() < 1/2 then u=1 else u=0
   r=2*u-1
   z=q*r
endfunction
```

Exercice supplémentaire

Exercice 4. : edhec 2009
Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Sous réserve de convergence,

$$\int_0^{+\infty} h(x)\ dx = \lambda \int_0^{+\infty} x \times \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)\ dx$$

On reconnaît l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc l'intégrale converge et :

$$\int_0^{+\infty} h(x)\ dx = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$$

(b) h est continue que $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, positive et $\int_0^{+\infty} h(t)\ dt = 1$.

De plus $\int_{-\infty}^{0} h(t)\ dt$ converge et vaut 0 car $h(t) = 0$ pour tout $x < 0$.

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt$ converge et vaut 1, et h est bien une densité de probabilité.

(c) Sous réserve d'absolue convergence on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\ dx$$

Or $\int_{-\infty}^{0} 0\ dx$ converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, et

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\ dx = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 \left(\lambda e^{-\lambda x}\right)\ dx$$

On reconnaît le moment d'ordre deux d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc l'intégrale converge absolument, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x)\ dx$ converge absolument et X admet une espérance.

De plus en posant $Y \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ la formule de Koenig-Huyghens donne :

$$E(X) = 0 + \lambda E(Y^2) = \lambda \left(V(Y) + \left[E(Y)\right]^2\right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda}$$

2. Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f, nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $[0;+\infty[$ et strictement positive sur $[0;+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y.

   Pour tout $x \leqslant 0$, $F(x) = 0$ donc $1 - F(x) = 1 > 0$.

   Pour tout $x > 0$,
$$1 - F(x) = 1 - P(Y \leqslant x) = P(Y > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\ dt$$
   Or f est strictement positive sur $[x;+\infty[$ donc l'aire sous sa courbe est strictement positive et
$$\int_x^{\infty} f(t)\ dt = 1 - F(x) > 0$$
   Autre possibilité : étudier la fonction $u : x \to 1 - F(x)$ en se servant de $F'(x) = f(x)$, donc $u'(x) = -f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

   Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et sa limite en $+\infty$ vaut 1 par propriété des fonctions de répartition, donc $u(x) < 1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   On définit alors la fonction g par :
$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1 - F(x)) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. (a) Pour $x < 0$, on a
$$g(x) = 0 \geqslant 0$$
   Pour $x \geqslant 0$, on a
$$g(x) = -f(x)\ln[1 - F(x)]$$
   avec
$$0 \leqslant F(x) \quad \text{et } 1 - F(x) > 0 \quad \text{donc} \quad 0 < 1 - F(x) \leqslant 1 \quad \text{et } \ln(1 - F(x)) \leqslant 0$$
   et le ln est bien défini. Enfin
$$g(x) = -f(x)\ln(1 - F(x)) \geqslant 0$$
   car $f(x) \geqslant 0$, et g est bien positive sur $\mathbb{R}$.

   (b) $g : x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty;0[$ car la fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}$.

   D'autre part, $g : x \mapsto -f(x)\ln(1 - F(x))$ est continue sur $[0;+\infty[$ car f l'est (par hypothèses), F l'est aussi (car c'est une fonction de répartition de variable à densité) et $1 - F(x)$ est à valeurs dans $]0;1]$ où la fonction logarithme est aussi continue.

   Attention, on ne parle ici que de continuité à droite en 0, et g (f non plus) n'est pas forcément continue en 0 donc ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

   (c) On cherche la convergence et sa valeur (et de toute manière, il faut faire une IPP donc c'est obligatoire) donc on revient à l'intégrale partielle :
$$\int_0^A g(x)\ dx$$
   On intègre par parties avec
$$u(x) = \ln(1 - F(x)) \qquad \text{et} \qquad v(x) = 1 - F(x)$$
   qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $[0;A]$ et
$$u'(x) = \frac{-f(x)}{1 - F(x)} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = -f(x)$$

$$\int_0^A g(x)\ dx = \Big[\big(1-F(x)\big)\times\big(1-F(x)\big)\Big]_0^A + \int_0^A f(x)\ dx$$

$$\int_0^A g(x)\ dx = \big(1-F(A)\big)\ln\big(1-F(A)\big)\ \big(1-F(0)\big)\ln\big(1-F(0)\big) + \int_0^A f(x)\ dx$$

$$\int_0^A g(x)\ dx = \big(1-F(A)\big)\ln\big(1-F(A)\big) + \int_0^A f(x)\ dx$$

car $F(0)=0$ donc $\ln\big(1-F(0)\big)=\ln 1=0$. Enfin on obtient

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A g(x)\ dx = \lim_{X\to 0} X\ln(X)+1 = 1$$

car $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)=1$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} 1-F(A)=0$ et $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X=0$ par croissances comparée d'une part, et $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ d'autre part.

Enfin on obtient que $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et $\int\limits_0^{+\infty} g(x)dx = 1$.

(d) g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ converge et vaut 1.

(En effet $\int_{-\infty}^{0} g(x)\ dx$ converge et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle.)

Donc g est une densité de probabilité.

(e) La densité de probabilité d'une loi exponentielle vérifie bien :

- $f(t)=0$ pour $t<0$
- $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ pour $t\geqslant 0$ est bien continue et strictement positive sur $[0;+\infty[$.

donc Y vérifie les conditions de la question précédente.

La variable aléatoire Z admet alors pour densité :

$$g(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0 \end{array}\right. = h(x)$$

car pour $x\geqslant 0$,

$$g(x) = -\lambda e^{-\lambda x}\ln\Big(1-\big(1-e^{-\lambda x}\big)\Big) = -\lambda e^{-\lambda x}\ln(e^{-\lambda x}) = -\lambda e^{-\lambda x}\times(-\lambda x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

On reconnaît bien la densité de X, et X et Z suivent bien la même loi.