# Devoir maison $n^{\text{o}}$ 13

A rendre le Mardi 31 Mars 2020

**Exercice 1.** : chap 11
On considère l'application $\varphi : ]0;+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

## Partie I : Etude de la fonction $\varphi$

1. Montrer que $\varphi$ est de classe $C^3$ sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in ]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Etudier le sens de variation de $\varphi''$ et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de $\varphi'$, et montrer : $\forall x \in ]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $\varphi$.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de $\varphi$, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
   Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.
   On précisera la nature de la branche infinie au voisinage de 0 et la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

## Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times ]0;+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

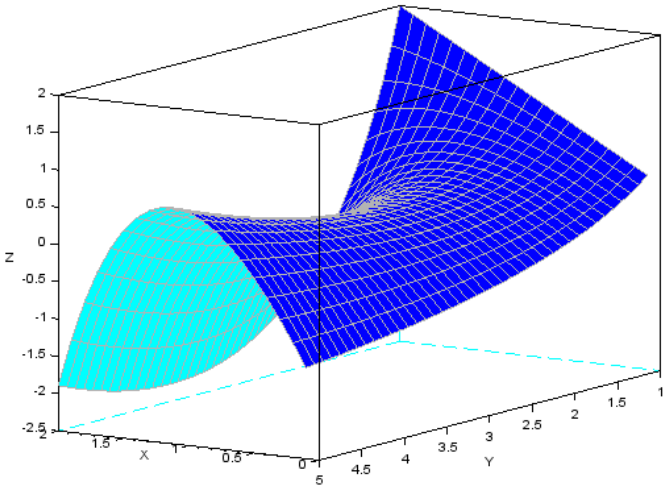
1. **Informatique :** On exécute le programme suivant :

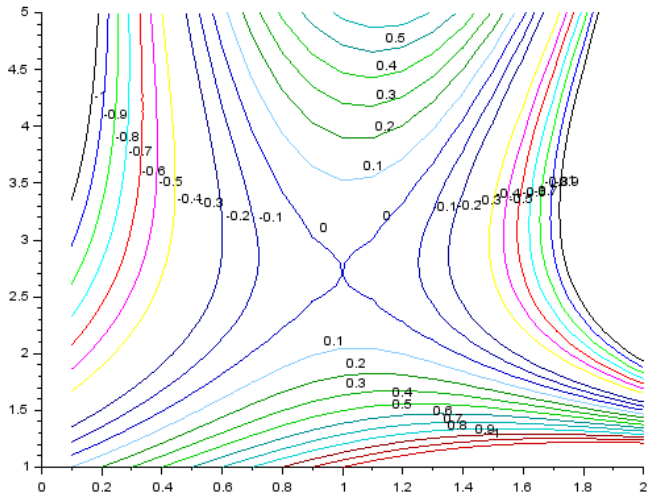
```
function z=f(x,y)
    z=x*y-exp(x)*log(y)
endfunction

x=[0.1:0.1:2]
y=[1:0.1:5]
fplot3d(x,y,f)

scf(1)
contour(x,y,f,[-1:0.1:1])
```

   On obtient les graphiques :



Au vu de ces résultats, $f$ semble-t-elle avoir un point critique sur l'ensemble $[0,1;2] \times [1;5]$ ? Si oui, donner une valeur approchée des $(x_0, y_0)$ en lequel il est atteint.
Ce point critique semble-t-il être un extremum local ?

2. Représenter graphiquement l'ensemble $U$.
3. Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur l'ouvert $U$ et calculer, pour tout $(x, y)$ de $U$, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de $f$ au point $(x, y)$.
4. Etablir que, pour tout $(x, y)$ de $U$, $(x, y)$ est un point critique de $f$ si et seulement si :

$$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0$$

5. En déduire que $f$ admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.
6. Est-ce que $f$ admet un extremum local en $(1, e)$ ?
7. Est-ce que $f$ admet un extremum local sur $U$ ?

## Partie III : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante et que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

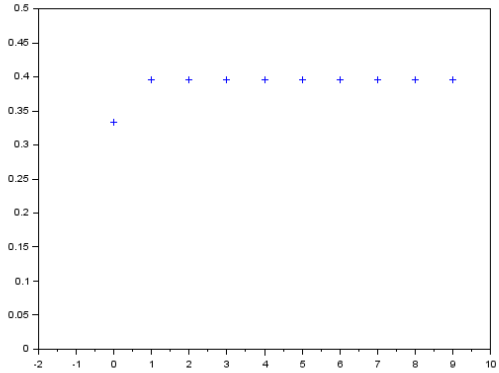
3. **Informatique :** Ecrire un programme en Scilab qui affiche et calcule le plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant 10^3$.
4. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ ?
5. **Informatique :** Compléter le programme suivant qui enregistre les 10 premiers termes de la suite $u$ dans un vecteur ligne `U` puis enregistre les 10 premiers termes de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ dans un vecteur ligne `S` et trace leur représentation graphique.

```
function y=phi(x)
    y=exp(x)-x.*exp(1/x)
endfunction

U=zeros(1,10)
U(1)=3
for k=1:9 do
    U(k+1)=************
end

S=cumsum(*************)
plot(0:9,S,'+')
```

Après exécution on obtient le graphique suivant :




Commenter.

**Exercice 2.**

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer $A^3$.
   (b) Déterminer une base $(a)$ de $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'une base $(b, c)$ de $Im\ f$.
   (c) Montrer que $Im\ f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par $M$ la matrice de $g$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $Im\ g^2 = \operatorname{Ker} g$.

2. (a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de $g$.
   (b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de $g$.
   (c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que $g$ n'est pas diagonalisable.

3. (a) Justifier qu'il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
   (b) Montrer que $(\ u, g(u), g^2(u)\ )$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (c) Donner la matrice $N$ de $g$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer $Im\ g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker} g$. Pour finir, déterminer $Im\ g^2$ puis conclure.

**Exercice 3.**
Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

## Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, $\lambda$ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

3. (a) Soit $U$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.
   (b) Ecrire une fonction en Scilab qui, étant donné un réel $\lambda$ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout $\omega$ de $\Omega$, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ et on note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

## Partie II : Loi de la variable aléatoire $T_n$

4. (a) Calculer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout $x$ de $\mathbb{R}^{+*}$, la probabilité $P(T_n \leq x)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $T_n$ est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction $f_n$.
5. (a) Montrer que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n$ admet une espérance.
   (b) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de $T_1$ et l'espérance $E(T_2)$ de $T_2$.
6. (a) Vérifier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$
   (b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)dx.$$

   (c) En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

## Partie III : La loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, $a$ désigne un réel strictement positif.

On définit la variable aléatoire $N$ égale au plus petit entier $n$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité : $(N = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X_k \leq a)$. En déduire la probabilité $P(N = 0)$.
8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N = n) = (1 - e^{-a})^{n-1} e^{-a}$.
9. Déterminer l'espérance $E(N)$ et la variance $V(N)$ de $N$.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $Z$, définie pour tout $\omega$ de $\Omega$ par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_N(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. Justifier $P(Z \leq a) = 0$.
11. Soit $x \in ]a, +\infty[$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité d'événements :
    $$((N = n) \cap (Z \leq x)) = \begin{cases} (a < X_1 \leq x) & \text{si } n = 1 \\ (T_{n-1} \leq a) \cap (a < X_n \leq x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$
    En déduire la probabilité $P((N = n) \cap (Z \leq x))$.
    (b) Montrer alors : $P(Z \leq x) = 1 - e^{a-x}$.
12. (a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
    (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $V(Z)$.