Indications du devoir maison n° 13

Exercice 1.
On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. φ n'a pas de point problématique, la méthode et la résolution pour la classe C^3 sont évidentes. Il suffit ensuite de calculer proprement pour ne pas faire d'erreurs dans les dérivées.

2. Première partie : pour étudier un signe, on factorise au maximum puis on étudie le signe de chaque facteur séparément et on conclut avec un tableau de signe. S'il y a un facteur problématique, il faut poser une fonction et l'étudier.

   Pour le signe de φ'', avant de se jeter sur la méthode ci-dessus, on essaie de conclure avec les variations de φ''.

   Pour la dernière inégalité, avant de se jeter sur la méthode habituelle (tout ramener à gauche et factoriser) on essaie d'utiliser les variations de φ'.

3. Calcul de limites : on essaie de conclure par opérations élémentaires et croissances comparées, et si on a une indétermination :

   - On factorise au maximum (factorisations réelles), on simplifie et on réessaie.

   - Si cela ne suffit pas, on cherche un équivalent de chaque facteur problématique en factorisant les sommes par leurs termes prépondérants, on en déduit un équivalent de la fonction et on réessaie.

   - Si un facteur n'a pas de terme prépondérant, on en fait apparaître un à l'aide d'un DL.

4. Voir la méthode ci-dessus. Pour la 2e, on peut utiliser astucieusement la 1ère.

5. On ne connaît pas les variations de φ, et de toute manière l'expression à droite dépend de x : on doit donc obligatoirement tout passer à gauche avant de dériver et d'étudier la fonction.

6. Ne pas oublier la classe C^2 (il suffit ici de la citer puisqu'on a déjà la classe C^3) puis de déterminer complètement le signe de φ'' (il ne suffit pas que φ'' s'annule, il faut qu'elle change de signe).
   Attention, c'est un point de la courbe, il a une abscisse et une ordonnée.
   Pour obtenir l'équation de la tangente au point, il suffit d'appliquer une formule bien connue.

7. La question 2 donne le signe de φ' donc on peut conclure rapidement aux cvariations. Pour le calcul de limite, voir question 3.
   Ensuite on fait attention de respecter toutes les informations obtenues précédemment, et notamment que la courbe traverse la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0;+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

8.
9. Question inusitée mais pas très difficile ici. Il suffit de hachurer la partie du plan correspondante.

10. Méthode évidente.

11. Résoudre le système en se servant du résultat à obtenir pour guider la résolution : puisqu'on donne y en fonction de x, il faut substituer y (en choisissant la bonne équation) puis transformer l'autre équation pour faire apparaître $\varphi(x)$.

12. Finir la résolution, en se servant de la partie I pour obtenir la solution de $\varphi(x) = 0$: puisqu'on ne sait pas résoudre l'équation, on est obligé de conclure par une bijection continue puis en trouvant une solution évidente (trouvée dans la partie I).

13. On applique la méthode usuelle : calcul puis signe des valeur propres de la Hessienne.

14. Question de cours : les seuls extrema locaux possibles sont les points critiques !

Partie III : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

15. Pour prouver une inégalité sur une suite récurrente, on fait une preuve par récurrence en se servant de l'étude de la fonction φ pour l'hérédité.

16. La croissance d'une suite monotone s'obtient soit par récurrence en comparant les deux premiers termes, soit avec le signe de $\varphi(x) - x$.

    On sélectionne la seconde méthode lorsque le premier terme de la suite est une constante inconnue ou lorsque le signe de $\varphi(x) - x$ a déjà été étudié. Sinon o utilise la première (c'est le cas ici).

17. Programme ultra classique.

18. On demande la nature mais pas la somme, on procède donc par théorème de comparaison. On cherche d'abord une inégalité obtenue grâce à l'énoncé (ici on en a une, question 14) ; sinon (inutile ici) on cherche un équivalent du terme général puis éventuellement à obtenir sa négligeabilité devant $\frac{1}{n^2}$ (impossible ici car on n'a pas d'expression explicite de la suite).
19.

Exercice 2.

1. (a) Evident.
   (b) Toujours penser à utiliser une matrice de f pour répondre aux questions sur f ; ne pas oublier de conclure sur f après avoir répondu sur A.

   (c) – Idem : calculer f^2 toujours selon la même méthode.

   – Pour montrer une égalité d'ensembles définis comme des Vect(...), on transforme la base d'une des deux avec des pivots en colonnes pour arriver à la même expression que la base de l'autre.

   – On peut aussi utiliser la méthode plus générale : on prouve deux inclusions, et chaque inclusion s'obtient en prenant un élément quelconque du plus petit, et en montrant qu'il appartient aussi au plus grand.

2. (a) Question ultra classique : "la seule **possible**" est synonyme de " en utilisant un polynôme annulateur.

   (b) Question théorique très classique sur les matrices nilpotentes (toujours penser à utiliser une matrice de g, donc M, pour répondre à une question sur g).

(c) Nouvelle question théorique très classique sur les matrices ayant une unique valeur propre (on passe toujours par la matrice M).

3. (a) Evident.

   (b) Question théorique, très classique à l'Essec, sur les endomorphismes nilpotents. Il faut prouver que la famille a le bon nombre de vecteurs (évident) est est libre. Avec trois vecteurs, on est obligé de résoudre un système, qu'on écrit. Ensuite on se débrouille pour transformer afin d'utiliser les deux seules informations sur g : $g^2(u) \neq 0$ et $g^3 = 0$.

   (c) Question évidente à condition de ne pas paniquer.

   (d) On utilise encore une matrice de g pour le calcul des trois espaces, on a le choix entre M et N, et le choix est vite fait... On n'oublie pas de conclure ensuite sur g (attention, la matrice utilisée n'est pas dans la base canonique...)

Exercice 3.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. question de cours

2. On reconnaîtra des intégrales usuelles faisant intervenir la densité d'une loi exponentielle : on donnera donc leur valeur sans faire de calcul intégral.

3. (a) Calculer la fonction de répartition de V : on résout l'inéquation $(-\ln(1-U) \geq x)$ en partant toujours de l'extérieur et en composant par la réciproque de la fonction usuelle que l'on rencontre...jusqu'à isoler U dans l'inéquation.

   A chaque étape, on se posera 2 questions : est-ce que j'ai le droit de composer par la fct ? (domaine de déf) + est-ce que ça va changer ,le sens de l'inégalité ?

   (b) Utiliser la question précédent : simuler une variable de la forme $-\ln(1-U)$ où U est un nombre choisi au hasard dans le segment $[0, 1]$.

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. (a) Méthode usuelle de calcul de la loi du max.

   (b) On vérifie que la fct de répartition est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf...
   Puis on dérive la fct de rép pour avoir une densité.

5. (a) On ne demande pas la valeur de l'espérance ! donc : thm de comparaison.

   (b) Là, on demande de calculer les intégrales !

6. (a) Méthode pour démontrer une égalité d'expressions : on calcul les 2 expression séparément et on montre qu'elles sont égales à une même troisième expression.

   (b) Il faut utiliser la question intermédiaire précédente, bien sûr !

   (c) Remarquer que si on développe l'intégrale de gauche de l'égalité précédente, on fait apparaître des espérances ! Quant à l'intégrale de droite, elle est calculable.

Partie III : La loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.

7. Pour démontrer l'égalité de 2 évènements : on les traduit tous les 2 et on justifie qu'ils signifient la même chose.
8. On traduit l'évènement $N = n$, on disant ce qu'il s'est passé à chacune des épreuves ! On traduira donc en faisant intervenir les variables $X_1, X_2, ..., X_n$.
9. On connait la loi de N :on reconnait une loi usuelle !

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_N(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}.$$

10. - Il faut conditionner sur le système complet d'évènement $((N = 0), (N \neq 0))$.
    - Dans la cas $(N \neq 0)$: Ne pas oublier ce que représente la variable N : du coup, vous connaissez des informations sur la variable X_N qui vous permettent de justifier que l'événement $(X_N \leq a)$ est forcément impossible.

11. (a) - Faire 2 raisonnements séparés : 1) le cas où $n = 1$ 2) le cas où $n = 2$
    - Dans les 2 cas : la méthode est la méthode de calcul d'une proba d'intersection (cf calcul de la loi d'un couple :)
    Ici, les variables ne sont pas indépendantes, il n'y a pas que 2 épreuves successives, donc c'est forcément la dernière méthode : ON TRADUIT l'évènement $((N = n) \cap (Z \leq x)$ i.e. : on dit, en français , ce qu'il s'est passé à CHACUNE des épreuves : la première, la deuxième ...etc, puis on l'écrit en maths : on traduit donc en faisant intervenir les variables $X_1, X_2, ..., X_n$, car chacune d'entre elle correspond à une seule épreuve.

    Enfin, Une fois qu'on a $X_1, X_2, ..., X_n$ ...on essaie de réécrire l'évènement en faisant intervenir T_{n-1} comme demandé.

    (b) C'est un calcul de loi marginale !
    Méthode : on applique la formule des probas totales sur le s.c.e. de l'autre variable : celui de N.

12. (a) Conclure en donnant la fct de répartition de Z puis calculer la fonction de répartition de $Z - a$.

    (b) Les déduire à l'aide de celles de $Z - a$ (connues car loi usuelle).