Essec II 2008 - Correction

Préliminaires

1. On sépare selon le signe de x :

$$|x| - x = \begin{cases} x - x = 0 \geqslant 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x - x = -2x \geqslant 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| - x \geqslant 0$.

2. (a) En développant, les carrés s'éliminent et il ne reste que les doubles-produits qu'on rassemble sous la forme souhaitée :

$$\Big(|v_1| + |v_2| + |v_3|\Big)^2 - \Big(v_1 + v_2 + v_3|\Big)^2 = 2\Big(|v_1v_2| - v_1v_2\Big) + \Big(|v_1v_3| - v_1v_3\Big) + \Big(|v_2v_3| - v_2v_3\Big).$$

(b) On sait que

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| = v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{donc} \quad \Big(|v_1| + |v_2| + |v_3|\Big)^2 = \Big(v_1 + v_2 + v_3|\Big)^2$$

et leur différence est nulle. On en déduit avec 2a que :

$$2\Big(|v_1v_2| - v_1v_2\Big) + \Big(|v_1v_3| - v_1v_3\Big) + \Big(|v_2v_3| - v_2v_3\Big) = 0.$$

Par 1, c'est une somme de termes positifs : elle est nulle si et seulement si les trois termes sont nuls, donc pour tout couple (j, j') tel que $j \neq j'$,

$$v_jv_{j'} = |v_jv_{j'}| \Longrightarrow v_iv_{j'} \geqslant 0$$

et donc v_j et $v_{j'}$ sont de même signe.

(c) Si les trois sont nuls, la propriété est vérifiée car $|V| = |-V| = V = 0$.

Sinon, si un des coefficients est non nul, tous les autres sont forcément du même signe, donc v_1, v_2 et v_3 sont soit tous positifs, soit tous négatifs.

Dans le 1er cas on a $|V| = V$ et dans le 2e on a $|V| = -V$.

3. On peut généraliser les questions précédentes : tout d'abord,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |v_k|\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{N} v_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{k'=k+1}^{N} 2(|v_kv_{k'}| - v_kv_{k'})$$

Or cette différence est nulle par (E), donc la somme de termes positifs suivante est nulle et chacun d'eux est nul.

Donc pour tous $i \neq j$,

$$v_iv_j = |v_iv_j| \geqslant 0$$

Toutes les composantes non nulles de V sont donc de même signe.

Si elles sont toutes positives, $|V| = V$ et si elles sont toutes négatives, $|V| = -V$.

Partie I. Google et PageRank

A. Etude de la matrice G de Google

1. $1-\rho > 0$ car $\rho < 1$ donc
$$\frac{1-\rho}{N} > 0.$$
De plus $\rho \geqslant 0$ et $A(i,j) \geqslant 0$ donc $\rho A(i,j) \geqslant 0$. En sommant on obtient
$$G(i,j) > 0$$
pour tous i et j de $[\![1;N]\!]$ donc G est strictement positive.

2. Si $d_j = 0$ alors la $j-$ième page ne pointe vers aucune autre, et pour tout $i \neq j$,
$$A(i,j) = 0 \quad \text{et} \quad G(i,j) = \frac{1-\rho}{N}.$$
D'où
$$\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = \sum_{i\neq j} \frac{1-\rho}{N} + G(j,j) = \frac{(N-1)(1-\rho)}{N} + \rho + \frac{1-\rho}{N} = \frac{(N-1+1)(1-\rho)}{N} + \rho = 1-\rho+\rho = 1.$$

3. Avec la décomposition indiquée, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} G(i,j) &= \sum_{\substack{i\in[\![1;N]\!] \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i,j) + \sum_{\substack{i\in[\![1;N]\!] \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i,j) \\
&= \sum_{\substack{i\in[\![1;N]\!] \\ j \text{ pointe vers } i}} \left(\frac{\rho}{d_j} + \frac{1-\rho}{N}\right) + \sum_{\substack{i\in[\![1;N]\!] \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} \frac{1-\rho}{N} \\
&= \rho \sum_{\substack{i\in[\![1;N]\!] \\ j \text{ pointe vers } i}} \frac{1}{d_j} + \frac{1-\rho}{N}\sum_{i=1}^{N} 1 = \rho \times \frac{d_j}{d_j} + (1-\rho)\frac{N}{N} = \rho + 1 - \rho = 1.
\end{aligned}$$

4. G est donc une matrice stochastique.

5. Soit $V = \begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix}$. On a pour tout i :
$$(GV)_i = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) = p(i) = V_i \quad \text{donc} \quad GV = V$$
et V est bien invariant par G.

B. Modèle du surfeur sur le Web

1. $(V_n)_i = \mathrm{P}(X_n = i)$ est positif pour tout i car c'est une probabilité.

   De plus $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$ donc les évènements $(X_n = i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ forment un système complet d'évènement, ce qui donne :
$$\sum_{i=1}^{N} (V_n)_i = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(X_n = i) = 1$$
et V_n est bien un vecteur de probabilité.

2. Pour tous i et j de $[\![1;N]\!]$ on a

$$\mathrm{P}\left[(X_n = i) \cap (X_{n-1} = j)\right] = \mathrm{P}(X_{n-1} = j)\,\mathrm{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i) = (V_{n-1})_j G(i,j).$$

3. On en déduit pour tout i, par formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $(X_{n-1} = j)_{1 \leqslant j \leqslant N}$:

$$(V_n)_i = \mathrm{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{P}\left[(X_n = i) \cap (X_{n-1} = j)\right]$$

D'où

$$\forall i \in [\![1;N]\!], \quad (V_n)_i = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\ (V_{n-1})_j = (GV_{n-1})_i \quad \text{donc} \quad V_n = GV_{n-1}.$$

4. Récurrence triviale :

Initialisation : $G^0 V_0 = IV_0 = V_0$, et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n = G^n V_0$, alors :

$$V_{n+1} = GV_n = GG^n V_0 = G^{n+1} V_0$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = G^n V_0$.

Partie II. Matrices stochastiques

A. Etude d'un exemple

1. On pose $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a

$$QV = V \iff \left\{ \begin{array}{l} (1-q)a + q'b = a \\ qa + (1-q')b = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} qa = q'b \\ qa = q'b \end{array} \right. \iff a = \frac{q'}{q} b$$

et l'ensemble des solutions est :

$$S = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} \frac{q'}{q} \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

2. $QV_\infty = V_\infty$ et V_∞ vecteur de probabilité équivaut à vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{q'}{q} x \\ x \end{pmatrix}$ où x est réel est un vecteur de probabilité ; il faut alors que $x \geqslant 0$ pour que les coordonnées soient positives et

$$x\left(\frac{q'}{q} + 1\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{q'+q}{q}} = \frac{q}{q+q'}$$

qui existe car q et $q+q'$ sont strictement positifs et qui est bien positif et on a donc une unique solution :

$$V_\infty = \begin{pmatrix} \frac{q'}{q+q'} \\ \frac{q}{q+q'} \end{pmatrix}.$$

3. On le prouve par récurrence sur n.

Initialisation : pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{1-q-q'}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} &= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q'+(1-q-q')q & q'-(1-q-q')q' \\ q-(1-q-q')q & q+(1-q-q')q' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} (1-q)(q+q') & q'(q+q') \\ q(q+q') & (1-q')(q+q') \end{pmatrix} = Q\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $Q^n = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$, alors

$$Q^{n+1} = \frac{1}{q+q'}Q\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}Q\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$Q\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = (1-q-q')\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$Q^{n+1} = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^{n+1}}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$,

$$Q^n = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

4. On sait que $0 < q < 1$ et $0 < q' < 1$ donc

$$0 < (q+q') < 2 \quad , \quad -2 < -q-q' < 0 \quad \text{et} \quad -1 < 1-q-q' < 1.$$

D'où $(1-q-q')^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$Q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q'}{q+q'} & \frac{q'}{q+q'} \\ \frac{q}{q+q'} & \frac{q}{q+q'} \end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice dont les deux colonnes sont égales à V_∞.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

1. Pour tout i on a

$$({}^tQU)_i = \sum_{j=1}^{N} {}^tQ(i,j) \times U(j) = \sum_{j=1}^{N} Q(j,i) = 1$$

car la matrice Q est stochastique. D'où ${}^tQU = U$.

2. Si $Q - I_N$ est inversible, d'inverse M on a

$$M(Q-I_N) = I_N \quad \text{donc} \quad {}^t[M(Q-I_N)] = {}^tI_N = I_N$$

ce qui donne

$${}^t(Q-I_N){}^tM = I_N \quad \text{et enfin} \quad ({}^tQ - {}^tI_N){}^tM = I_N \quad \text{donc} \quad ({}^tQ - I_N){}^tM = I_N$$

et ${}^tQ - I_N$ est inversible, d'inverse ${}^tM$.

3. Supposons par l'absurde que 1 n'est pas valeur propre de Q, alors $Q - I_N$ est inversible.

   Par la question 2 on obtient ${}^tQ - I_N$ est inversible, donc 1 n'est pas valeur propre de ${}^tQ$, ce qui est absurde car la question 1 montre qu'elle l'est, avec U un vecteur propre associé.

   D'où 1 est bien valeur propre de Q.

4. On a $QV = \lambda V$ donc $|QV| = |\lambda|\ |V| = |V|$.

   On a alors pour tout i,

$$(|V|)_i = (|QV|)_i = \left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |Q(i,j)V_j| = \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,|V_j| = (Q|V|)_i$$

   par inégalité triangulaire, et positivité des $Q(i,j)$ car Q est stochastique.

   On en déduit que pour tout i,

$$(Q|V| - |V|)_i \geqslant 0$$

   et $Q|V| - |V|$ est bien positif.

5. On s'intéresse, comme conseillé, à :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(Q|V| - |V|)_i &= \left(\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)|V_j|\right]\right) - \sum_{i=1}^{N}|V_i| = \left(\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)|V_j|\right]\right) - \sum_{i=1}^{N}|V_i| \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N}|V_j|\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)\right) - \sum_{i=1}^{N}|V_i| = \sum_{j=1}^{N}[|V_j| \times 1] - \sum_{i=1}^{N}|V_i| = 0.\end{aligned}$$

   On obtient une somme de termes positifs par question 3 qui est nulle donc chacun des termes est nul.

   Pour tout i on a donc $(Q|V| - |V|)_i = 0$ donc $(Q|V|)_i = (|V|)_i$ pour tout i et enfin $Q|V| = |V|$; le vecteur $|V|$ est donc bien invariant par Q.

6. On vient de prouver l'existence d'un vecteur positif non nul V_1 invariant par Q, car il existe un vecteur V non nul vecteur propre associé à 1, et $V_1 = |V|$ est non nul, positif et invariant par Q.

   Soit $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{N}(V_1)_i$, qui est une somme de termes positifs non tous nuls, donc on a $\alpha > 0$.

   On pose alors $V_\infty = \frac{1}{\alpha}V_1$ et on a :

   - $QV_\infty = \frac{1}{\alpha}QV_1 = \frac{1}{\alpha}V_1 = V_\infty$ donc V_∞ est invariant par Q.

   - pour tout i, $(V_\infty)_i = \frac{(V_1)_i}{\alpha} \geqslant 0$ comme quotient d'un facteur positif par un facteur strictement positif.

   - $\sum\limits_{i=1}^{N}(V_\infty)_i = \sum\limits_{i=1}^{N}\frac{(V_1)_i}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{N}(V_1)_i = \frac{1}{\alpha} \times \alpha = 1$ donc V_∞ est un vecteur de probabilité.

   On a donc bien trouvé un vecteur de probabilité invariant par Q.

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

1. Raisonnons par l'absurde. Soit V un vecteur invariant positif, non nul et non strictement positif.

   V est non nul donc il existe k tel que $V_k > 0$.

   V n'est pas strictement positif donc il existe l tel que $V_l = 0$.

   On a alors $(QV)_l = V_l = 0$ d'une part, et d'autre part :

   $$(QV)_l = \sum_{j=1}^{N} Q(l,j)V_j \geqslant Q(l,k)V_k > 0$$

   car tous les autres termes sont positifs et $Q(l,k) > 0$ et $V_k > 0$.

   C'est absurde et on a bien prouvé qu'un vecteur invariant positif est soit nul, soit strictement positif.

2. V_∞ est un vecteur de probabilité donc

   $$\sum_{i=1}^{N} (V_\infty)_i = 1;$$

   il est donc non nul, sinon cette somme serait nulle.

3. On calcule :

   $$QV = Q(W_\infty - \alpha V_\infty) = QW_\infty - \alpha QV_\infty = W_\infty - \alpha V_\infty = V$$

   donc V est invariant par Q.

   On peut aussi dire que l'ensemble des vecteurs invariants est le sous-espace propre associé à 1, qui est donc stable par combinaison linéaire.

4. Pour tout i on a

   $$\frac{(W_\infty)_i}{(V_\infty)_i} \geqslant \alpha \quad \text{donc} \quad \alpha(V_\infty)_i \leqslant (W_\infty)_i \quad \text{et enfin} \quad (W_\infty - \alpha V_\infty)_i = V_i \geqslant 0$$

   donc V est positif.

   D'autre part on a

   $$V_{i_0} = (W_\infty)_{i_0} - \frac{(W_\infty)_{i_0}}{(V_\infty)_{i_0}} \times (V_\infty)_{i_0} = 0$$

   donc V n'est pas strictement positif.

5. V est invariant et positif donc il est soit strictement positif, soit nul.

   Or il n'est pas strictement positif, donc il est nul.

   On en déduit que

   $$V = W_\infty - \alpha V_\infty = 0 \quad \text{donc} \quad W_\infty = \alpha V_\infty.$$

6. On a alors

   $$1 = \sum_{i=1}^{N} W_\infty = \alpha \sum_{i=1}^{N} V_\infty = \alpha \times 1.$$

   D'où $\alpha = 1$, et $W_\infty = V_\infty$.

7. On a prouvé que la matrice G est stochastique (IA4) et strictement positive (IA1) ; or le système (S) définit un vecteur de probabilité invariant par G.

   On vient de prouver que toute matrice stochastique strictement positive admet un unique vecteur de probabilité invariant, donc le système (S) admet bien une unique solution.

8. Pour tout (i,j) on a $G(i,j) = \rho A(i,j) + \frac{1-\rho}{N} \geqslant \frac{1-\rho}{N}$ car $A(i,j) \geqslant 0$.

   D'où on obtient pour tout (i,j),
$$G(i,j)p(j) \geqslant \frac{1-\rho}{N}p(j).$$
   On somme ces inégalité pour j allant de 1 à N :
$$\sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1-\rho}{N}p(j) = \frac{1-\rho}{N}\sum_{j=1}^{N} p(j) = \frac{1-\rho}{N}$$
   car $\sum\limits_{j=1}^{N} p(j) = 1$. Or on a, pour tout i,
$$p(i) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) \quad \text{donc} \quad p(i) \geqslant \frac{1-\rho}{N}.$$

9. Avec $\rho = 1$ on a $G(i,j) = A(i,j)$ et la matrice G n'est plus strictement positive.

   En prenant 3 pages qui ne pointent vers aucune des autres on obtient par exemple $G = I_3$ et toute distribution de probabilité p_1, p_2, p_3 vérifiant $p_i \geqslant 0$ pour tout i et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ serait solution du système.

   De manière plus générale si la 1ère page ne pointe vers aucune autre, on obtient le premier vecteur de la base canonique sur la première colonne puis on vérifie à l'aide de $G(1,1)p(1) + G(1,2)p(2) + G(1,3)p(3) = p(1)$ que $G(1,2) = G(1,3) = 0$, ce qui donne une première ligne égale à $(1,0,0)$, et le système se ramène à un nouveau système sur $p(2)$ et $p(3)$ dépendant d'un paramètre $p(1)$, admettant au moins une solution pour chaque valeur du paramètre $p(1)$, donc une infinité de solution.

Partie III. Validation du PageRank

A. Valeurs propres de Q

1. On calcule $\|QV\|_1$ et on la majore :
$$\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |Q(i,j)V_j|$$
   par inégalité triangulaire. D'où
$$\|QV\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)|V_j| = \sum_{j=1}^{N} |V_j| \left(\sum_{i=1}^{N} Q(i,j) \right) = \sum_{j=1}^{N} |V_j| = \|V\|_1.$$
   Si V est positif, les V_i sont positifs et les valeurs absolues disparaissent ; le calcul précédent se réécrit avec des égalités pour obtenir $\|QV\|_1 = \|V\|_1$.

2. Si λ est une valeur propre de Q et V un vecteur propre associé on a alors
$$\|QV\|_1 = \|\lambda V\|_1 \leqslant \|V\|_1.$$
   On vérifie facilement que $\|\lambda V\|_1 = |\lambda| \; \|V\|_1$ et on obtient en divisant par $\|V\|_1 > 0$:
$$|\lambda| \leqslant 1.$$

3. On simplifie les deux sommes :

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)V_j\right| = |(QV)_1| = |\lambda V_1| = |\lambda|\ |V_1| = |V_1|$$

d'une part, et d'autre part

$$\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|V_j| = (Q|V|)_1 = (|V|)_1 = |V_1|$$

car $|V| = V_\infty$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. Enfin on obtient bien :

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)V_j\right| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|V_j|$$

4. Le préliminaire P.3. donne alors $V = |V|$ ou $V = -|V|$; dans les deux cas, V est colinéaire à $|V|$ donc V appartient au même sous-espace propre que $|V|$, associé à la valeur propre 1, et $\lambda = 1$.

B. Convergence

1. Q est diagonalisable donc il existe S inversible et D diagonale telle que $Q = SDS^{-1}$. Une récurrence classique donne $Q^n = SD^nS^{-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de Q, qui apparaissent autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

   Toutes les valeurs propres sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1 ; de plus on a vu que -1 n'est pas valeur propre. Il reste à vérifier que $\dim E_1(Q) = 1$.

   1 est bien valeur propre donc $\dim E_1(Q) \geqslant 1$. De plus si V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors $\|V\|_1 > 0$ car $V \neq 0$. On pose alors $V_1 = \frac{1}{\|V\|_1}V$, qui est colinéaire à V et vérifie les hypothèses de la question IIIA4, donc $V_1 = \pm V_\infty$ est colinéaire à V_∞, et V l'est aussi.

   On en déduit que tout vecteur propre associé à 1 est colinéaire à V_∞, et $E_1(Q) = \mathrm{Vect}(V_\infty)$ est bien de dimension 1 ; la valeur propre 1 n'apparaît donc qu'une seule fois sur la diagonale de D, et toutes les autres valeurs de la diagonale sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

3. La matrice D^n converge alors vers une matrice diagonale D_∞ avec un 1 et $(N-1)$ 0 sur sa diagonale car D^n est la matrice diagonale avec pour coefficients diagonaux les λ^n.

   Pour $\lambda = 1$ on a $\lambda^n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et pour $|\lambda| < 1$ on a $\lambda^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Enfin on obtient $Q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} SD_\infty S^{-1} = Q_\infty$ en revenant à la définition du produit avec les coefficients qui prouve la continuité des opérations effectuées (uniquement des produits et des sommes).

4. On prouve en revenant à la définition du produit avec les coefficients et à celle des matrices stochastiques que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique : soient A et B stochastiques, on pose $C = AB$: pour tous i et j,

$$C(i,j) = \sum_{k=1}^{N} A(i,k)B(k,j) \geqslant 0$$

   comme somme de termes positifs, car A et B sont positives. De plus pour tout j,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} C(i,j) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} A(i,k)B(k,j) = \sum_{k=1}^{N}\left[B(k,j)\sum_{i=1}^{N} A(i,k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{N} B(k,j)\times 1 = 1\end{aligned}$$

car A, puis B, sont stochastiques.

Une récurrence évidente donne alors Q^n stochastique pour tout n.

Enfin on en déduit que pour tout n pour tout i, pour tout j,

$$Q^n(i,j) \geqslant 0 \Longleftrightarrow Q_\infty(i,j) = \lim_{n\to+\infty} Q^n(i,j) \geqslant 0.$$

D'autre part, pour tout n, pour tout j,

$$\sum_{i=1}^{N} Q^n(i,j) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} Q_\infty(i,j) \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} Q^n(i,j) = 1.$$

et la matrice Q_∞ est stochastique.

5. La suite $(Q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (QQ^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Q_∞ d'une part et vers QQ_∞ d'autre part ; l'unicité de la limite donne alors :
$$QQ_\infty = Q_\infty.$$

6. Notons $(Q_\infty)_j$ la j-ième colonne de Q_∞, on a : pour tout $i \in [\![1;N]\!]$,
$$(Q(Q_\infty)_j)(i) = \sum_{k=1}^{n} Q(i,k)(Q_\infty)_j(k) = \sum_{k=1}^{n} Q(i,k)Q_\infty(k,j) = (QQ_\infty)(i,j) = Q_\infty(i,j) = (Q_\infty)_j(i)$$
donc la j-ème colonne de Q_∞ est invariante par Q, et le résultat est vrai pour tout j donc pour toutes les colonnes de Q_∞.

7. Q_∞ est stochastique donc chacun de ses vecteurs colonnes est un vecteur de probabilité, invariant par Q par IIIB6, donc chacun est égal à V_∞ qui est l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

C. Application au modèle du surfeur

1. Pour tout n, on a $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$ et $X_\infty(\Omega) = [\![1;N]\!]$.

   Pour tout $i \in [\![1;N]\!]$ on a
$$\mathrm{P}(X_n = i) = (V_n)_i = (G^n V_0)_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} (G_\infty V_0)_i.$$
   Toutes les pages ont la même probabilité d'être visitées en premières donc $V_0 = \frac{1}{N}U$ où U est le vecteur dont toutes les composantes valent 1.

   D'où pour tout i,
$$(G_\infty V_0)_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} G_\infty(i,j) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_\infty(i) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} p(i) = \frac{p(i)}{N}\sum_{j=1}^{N} 1 = p(i) = \mathrm{P}(X_\infty = i)$$
   donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X_∞.

2. Avec une page de départ prise au hasard, au bout d'un très grand nombre de changement de pages, le surfeur a une probabilité très proche de $p(i)$ de se trouver sur la page i (aussi proche que l'on veut de $p(i)$ si on fait suffisamment de changements de pages).