Correction DM ESSEC n° 6

<u>Exercice</u> : HEC 2015

1. (a) Montrons que f est linéaire : soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ et λ un réel, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x+y) &= \lambda x+y-\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x+y)_i\right)v=\lambda x+y-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i+y_i\right)v \\ &= \lambda x+y-\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\right)v=\lambda x+y-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)v \\ &= \lambda\left[x-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v\right]+y-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)v=\lambda f(x)+f(y) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, comme $v\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\in\mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

On en déduit bien que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$f\circ f(x)=f[f(x)]=f[x-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v]=f(x)-f(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v)=f(x)-\sum_{i=1}^{n}x_if(v)$$

car f est linéaire et $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ est un scalaire.
or $f(v)=v-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\right)v=v-1v=0$ donc $f\circ f(x)=f(x)$.

2. La question précédente montre que le polynôme $P(x)=x^2-x=x(x-1)$ est annulateur de f. Ses racines sont 0 et 1, ce sont donc les deux seules valeurs propres possibles de f.

Il reste à vérifier si ils sont bien valeurs propres, en résolvant les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$. La première donne :

$$x-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v=0$$

qui ne donne rien car on ne peut exprimer x en fonction des autres données. Il faut alors tenter des vecteurs en espérant trouver une solution. v étant le seul donné par l'énoncé, on essaie de calculer :

$$f(v)=v-\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\right)v=v-1v=0$$

et $v\neq 0$, donc v est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, et 0 est bien valeur propre. La deuxième équation donne :

$$f(x)=x\Longleftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)v=0\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

car $v\neq 0$. De nouveau il est compliqué de donner la solution "complète", mais on peut trouver une solution simple, par exemple $e_1-e_2=(1,-1,0,\ldots,0)$ qui donne bien :

$$f(e_1-e_2)=e_1-e_2-(1-1+0+\ldots 0)v=e_1-e_2-0=e_1-e_2$$

et $e_1-e_2\neq 0$, c'est un vecteur propre associé à 1, et 1 est bien valeur propre. On obtient finalement :

$$\mathrm{Sp}(f)=\{0;1\}.$$

3. (a) On procède par double implication.

   - Supposons que $y \in \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. On calcule alors $f(y)$: par 1b on a
   $$f(y) = f[f(x)] = f(x) = y$$
   donc on obtient bien :
   $$y \in \operatorname{Im} f \Longrightarrow f(y) = y$$
   - Supposons que $f(y) = y$, alors y s'exprime bien comme l'image d'un vecteur par f, c'est bien un élément de $\operatorname{Im} f$. On obtient donc
   $$f(y) = y \Longrightarrow y \in \operatorname{Im} f$$
   et enfin :
   $$y \in \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow f(y) = y.$$

   (b) On a vu que 0 est valeur propre, donc $E_0(f) = \operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit à 0, sa dimension est supérieur ou égale à 1. Par théorème du rang on obtient alors :
   $$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\operatorname{Ker} f) = n - \dim(\operatorname{Ker} f) \leqslant n - 1.$$

   (c) On utilise la caractérisation de la question 3a. Pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, on cherche les coordonnées de $(e_i - e_{i+1})$ puis on calcule son image :
   $$e_i - e_{i+1} = (0, \dots 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$$
   donc la somme de ses coordonnées vaut 0. On obtient alors :
   $$f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1} - (0)v = e_i - e_{i+1}$$
   et $e_i - e_{i+1}$ vérifie $f(y) = y$, c'"est bien un élément de $\operatorname{Im} f$.

   (d) On vient de trouver $(n-1)$ vecteurs de $\operatorname{Im} f$, qui forment une famille libre car ils sont échelonnés. On en déduit que la dimension de $\operatorname{Im} f$ est supérieure ou égale à $n-1$. Avec la question 3b, on en déduit que :
   $$\dim(\operatorname{Im} f) = n - 1$$
   et la famille $(e_i - e_{i+1})_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$, et son cardinal est égal à la dimension de $\operatorname{Im} f$, c'est donc une base de $\operatorname{Im} f$. Enfin on obtient :
   $$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = n - 1.$$

4. (a) Par théorème du rang, on en déduit que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1.

   Or la famille (v) est une famille de $\operatorname{Ker} f$ par question 2, libre car constituée d'un seul vecteur, non nul, et son cardinal est égal à la dimension de $\operatorname{Ker} f$. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

   (b) Les valeurs propres de f sont 0 et 1. On a déjà calculé :
   $$E_0(f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(v).$$
   D'autre part par question 3a, on a :
   $$y \in E_1(f) \Longleftrightarrow f(y) = y \Longleftrightarrow y \in \operatorname{Im} f$$
   donc
   $$E_1(f) = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}[(e_i - e_{i+1})_{i \in \ln 1; n-1]\!]}$$

   (c) La somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut donc $1 + n - 1 = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc f est diagonalisable.

5. On calcule pour tout $i \in [\![1; n]\!]$: comme $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ la somme de ses coordonnées vaut 1 et on obtient :
$$f(e_i) = e_i - \left(\sum_{j=1}^{n} (e_i)_j\right) v = e_i - v = e_i - (v_1, \dots, v_n) = \sum_{j=1}^{i-1} -v_j e_j + (1 - v_i)e_i + \sum_{j=i+1}^{n} -v_j e_j$$

ce qui montre que M est une matrice comportant des colonnes toutes égales aux coordonnées du vecteur v, sauf sur la diagonale ou on rajoute 1, ce qui donne :

$$M = I - \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Dans la base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale, et on trouve les valeurs propres de f sur la diagonale : comme E_0 est de dimension 1 et E_1 de dimension $n-1$, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Problème</u> : ESSEC II 2006

I Problème 1 Distance en variation et couplage

1 Partie 1 *Distance en variation*

1. Lorsque $\mathcal{K} = \{0;1\}$
on a $D(P,Q) = \frac{1}{2}(|p_0 - q_0| + |p_1 - q_1|)$
et comme $p_0 + p_1 = 1$ on a donc $p_0 = 1 - p_1$ et $q_0 = 1 - q_1$.
Donc $D(P,Q) = \frac{1}{2}(|q_1 - p_1| + |p_1 - q_1|) = |p_1 - q_1|$ (car $|-x| = |x|$ pour tout x réel).

2. Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$,
Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on a $0 \leq |p_k - q_k| \leq |p_k| + |q_k| = p_k + q_k$ (inégalité triangulaire)
Comme les séries de terme général p_k et q_k convergent, celle de terme général $p_k + q_k$ également.
Et par majoration des termes positif d'une série, la série de terme général $|p_k - q_k|$ converge.

3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$ et $0 \leq Q(A) \leq 1$
Donc $-1 \leq P(A) - Q(A) \leq 1$ d'où $|P(A) - Q(A)| \leq 1$ (équivaut en fait)
On a bien $|P(A) - Q(A)| \in [0,1]$.

4. Pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$P(A) = \sum\limits_{k \in A} p_k$ et en s'inspirant de la question 1) $\sum\limits_{k \in A} p_k = 1 - \sum\limits_{k \in \bar{A}} p_k$ (et de même pour Q)
Donc $P(A) - Q(A) = \sum\limits_{k \in A} (p_k - q_k)$ d'une part
et $P(A) - Q(A) = 1 - \sum\limits_{k \in \bar{A}} p_k - 1 + \sum\limits_{k \in \bar{A}} q_k = \sum\limits_{k \in \bar{A}} (q_k - p_k) = -\sum\limits_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k)$ d'autre part.
Donc $2|P(A) - Q(A)| = |P(A) - Q(A)| + |P(A) - Q(A)| = \left|\sum\limits_{k \in A} (p_k - q_k)\right| + \left|\sum\limits_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k)\right|$.

5. On a $D(P,Q) = \frac{1}{2} \sum\limits_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|$ et $\mathcal{K} = A \cup \bar{A}$ (disjointe)
Donc $D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum\limits_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k|\right)$
Et comme $\sum\limits_{k \in A} |p_k - q_k| \geq \left|\sum\limits_{k \in A} p_k - q_k\right|$ alors $2D(P,Q) \geq \left|\sum\limits_{k \in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum\limits_{k \in \bar{A}} p_k - q_k\right| \geq 2|P(A) - Q(A)|$.

6. Soit $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$
On a alors pour tout $k \in A$: $|p_k - q_k| = -(p_k - q_k)$ et pour $k \in \bar{A}$, $|p_k - q_k| = p_k - q_k$ (car dans $\bar{A}$, $q_k \geq p_k$ est faux)
Donc
$D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum\limits_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k|\right) = \frac{1}{2}\left(-\sum\limits_{k \in A} p_k - q_k + \sum\limits_{k \in \bar{A}} p_k - q_k\right)$

$D(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k\in A} p_k - q_k\right| + \left|\sum_{k\in \bar{A}} p_k - q_k\right|\right) = |P(A) - Q(A)|$

car $\sum_{k\in A} p_k - q_k \leq 0$ et $\sum_{k\in \bar{A}} p_k - q_k \geq 0$.

7. On réutilise la question précédente :
   Avec $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$ on a $D(P,Q) = |P(A) - Q(A)|$
   Or pour $k \in A : p_k \wedge q_k = p_k$ et pour $k \in \bar{A} : p_k \wedge q_k = q_k$.

   Donc $1 - \sum (p_k \wedge q_k) = 1 - \sum_{k\in A} p_k - \sum_{k\in \bar{A}} q_k$ et comme $1 - \sum_{k\in A} p_k = P(\bar{A}) = \sum_{k\in \bar{A}} p_k$
   alors $1 - \sum (p_k \wedge q_k) = \sum_{k\in \bar{A}} p_k - q_k = Q(A) - P(A)$.
   Et comme ici $Q(A) - P(A) = \sum q_k - p_k \geq 0$ et $Q(A) - P(A) = |P(A) - Q(A)|$ on a bien finalement :

$$D(P;Q) = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k$$

8. $D(P;Q) = 1 - \sum (p_k \wedge q_k)$ suggère de passer par l'événement contraire.
   (L'événement $X = Y$ est d'autre part plus facile à décomposer que $(X \neq Y)$)
   $\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y)$
   On décompose $(X = Y) = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} (X = k \cap Y = k)$ (disjointe) donc $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$
   Et comme $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq \mathbf{P}(X = k) = p_k$ (car $(X = k \cap Y = k) \subset (X = k)$)
   et $Q(X = k \cap Y = k) \leq Q(Y = k) = q_k$
   alors $\mathbf{P}(X = k \cap Y = k)$ est inférieur au plus petit des deux :

$$\mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \leq p_k \wedge q_k$$

   et en assemblant :

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbf{P}(X = Y) = 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbf{P}(X = k \cap Y = k) \geq 1 - \sum_{k\in\mathcal{K}} p_k \wedge q_k = D(P,Q).$$

2 Partie II Couplage binomiale-Poisson

1. Soit $Y_1, \cdots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ/n ,
   Alors $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres : λ.

2. Soit $f(x) = 1 - (1-x)\exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - (1-x)e^x = xe^x \geqslant 0$ sur $[0;1]$, donc f est croissante et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc pour tout $x \in [0,1] : f(x) = 1 - (1-x)\exp(x) \in [0,1]$

3. Par définition, (les seules valeurs de X sont 0 et 1) X_i suit une loi de Bernouilli.
   Reste à déterminer le paramètre $\mathrm{P}(X_i = 1)$; on passe par $P(X_i = 0)$ donné par l'énoncé :

   $\mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(U_i = Y_i = 0) = \mathbf{P}(U_i = 0 \cap Y_i = 0) = \mathbf{P}(U_i = 0)\,\mathbf{P}(Y_i = 0) = (1 - f(\lambda/n))\,e^{-\lambda/n}$

   $\mathbf{P}(X_i = 0) = \left[1 - \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)e^{\lambda/n}\right)\right]e^{-\lambda/n} = 1 - \frac{\lambda}{n}$.

   donc $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{\lambda}{n}$
   Donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n.

   Par indépendance des (X_i) on a alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi de binômiale de paramètres $(n, \lambda/n)$.

4. Comme les valeurs de X_i sont 0 et 1,

   $P(X_i = Y_i) = P([X_i = 0 \cap Y_i = 0] \cup [X_i = 1 \cap Y_i = 1]) = P([X_i = 0] \cup [Y_i = 1])$ incompatibles donc

$\mathbf{P}(X_i = Y_i) = \mathbf{P}[X_i = 0] + \mathbf{P}[Y_i = 1] = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda/n}$ et $\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda/n} = \frac{\lambda}{n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)$.

Reste à montrer que $1 - e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0$:
Soit $g(x) = x - 1 + e^{-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ pour $x \geq 0$
Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$ alors $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

Donc $1 - e^{-\lambda/n} \leq \frac{\lambda}{n}$ et $\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.

5. **Si** $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \neq \sum\limits_{i=}^{n} Y_i$ **alors**, pour au moins un des i : $X_i \neq Y_i$
   Donc $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \neq \sum\limits_{i=}^{n} Y_i\right) \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\}\right)$, et $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \neq \sum\limits_{i=}^{n} Y_i\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\}\right)$.
6. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\}$ n'est pas une réunion d'incompatibles.
   Mais comme $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ pour tout A et B événements alors :

   $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{X_i \neq Y_i\}\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \neq Y_i)$ et donc $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \neq \sum\limits_{i=}^{n} Y_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n}$.

   N.B. Il faut comprendre ici, que la distance entre deux lois, est celle entre les probablités définies par ces lois.
   (P définie par $P(\{k\}) = \mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et Q par Y qui suit une loi Poisson de paramètre λ)
   Soient $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
   On a vu que $D(P, Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}$.

   Donc $D(\mathcal{B}(n, \lambda/n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{\lambda^2}{n}$.

7. Quand n tend vers l'infini, cette distance entre les deux lois tend vers 0.
   Cette distance étant la somme des écarts entre les probabilités données par les deux lois, l'erreur que l'on fera en employant $\mathcal{P}$ au lieu de $\mathcal{B}$ tendra vers 0.
   On emploie souvent ces lois pour une somme de termes. Là, la convergence se fera bien.
   Par contre, pour des sommes construites à partir de ces lois (espérance par exemple), la convergence n'est plus assurée par ce résultat ....mais l'est par le calcul, les deux ayant une espérance de λ.

II Problème 2 (Couplage exponentielle-normale)

1 Partie 1 Quantiles gaussiens

1. Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\varphi > 0$.
   Comme Φ est une fonction de répartition alors $\lim\limits_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \Phi = 1$.

   Donc Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{-\infty} \Phi, \lim\limits_{+\infty} \Phi\right[=]0, 1[$.

   (Cela garantit que Y est bien définie puisque $1 - \Phi(x) > 0$.)

2. Soit F la fonction de répartition de Y.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(g(X) \leq x) = \mathrm{P}(-\ln(1 - \Phi(X)) \leq x) = P(\ln(1 - \Phi(X)) \geq -x)$

   $= P(1 - \Phi(X) \geq e^{-x}) = P(\Phi(X) \leq 1 - e^{-x})$.

   Pour prendre l'image par la réciproque, on a besoin de $1 - e^{-x} \in]0, 1[$ ce qui équivaut à $x > 0$.

   – pour $x \leq 0$: $F(x) = 0$ car $\Phi(X) > 0$.

– pour $x > 0$: $F(x) = \mathrm{P}\left(X \leq \Phi^{-1}\left(1 - e^{-x}\right)\right) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(1 - e^{-x}\right)\right) = 1 - e^{-x}$
et on reconnait bien là la fonction de répartion d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) la formule ressemble au résultat d'une intégrationpar parties.
On a $1 - \Phi(x) = \mathrm{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$
et on fait apparaître un t qui se mariera avec le $e^{-t^2/2}$ pour faire apparaitre une dérivée de composée.

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} \frac{1}{t} dt$$

Puis on repasse à l'intégrale finie pour intégrer par parties :
avec $u'(t) = te^{-t^2}$: $u(t) = -e^{-t^2/2}$: $v(t) = \frac{1}{t}$: $v'(t) = \frac{-1}{t^2}$ et u et v de classe C^1 sur $[x, M]$;

$$\int_x^M te^{-t^2/2} \tfrac{1}{t} dt = \left[-e^{-t^2/2} \tfrac{1}{t}\right]_x^M - \int_x^M \tfrac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt \xrightarrow[M \to +\infty]{} \tfrac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \tfrac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

(l'intégrale converge par majoration par $\varphi(t)$) et en divisant par $\sqrt{2\pi}$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \quad \text{pour tout } x > 0$$

(b) On montre tout d'abord que $\int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t)\, dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt$:
sur $[x, +\infty[$: $t^{-2} = t^{-3} t \leq x^{-3} t$ car $t \to t^{-3}$ y est décroissante.
donc $t^{-2} \varphi(t) \leq x^{-3} t \varphi(t)$ (car $\varphi(t) \geq 0$)
Et $\int_x^M t^{-2} \varphi(t)\, dt \leq x^{-3} \int_x^M t\, \varphi(t)\, dt$ pour $M \geq x$
Et comme $\int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt$ converge, par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\int_x^{+\infty} t^{-2} \varphi(t)\, dt \leq x^{-3} \int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt$$

.En multipliant par $x/\varphi(x)$ on obtient :

$$\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} = 1 - \frac{x}{\varphi(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

d'où les deux inégalités :
– $\dfrac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$ car $\dfrac{x}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \geq 0$
– $\dfrac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \geq 1 - \dfrac{x^{-2}}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt$

Dans cette dernière inégalité, reste à montrer que $\dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt \leq 1$ pour tout $x > 0$
En fait, on a $\int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt = \varphi(x)$
En effet $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = -x\varphi(x)$ dérivée que l'on intègre.
Donc $\int_x^M t\, \varphi(t)\, dt = \varphi(x) - \varphi(M) \xrightarrow[M \to +\infty]{} \varphi(x) = \int_x^{+\infty} t\, \varphi(t)\, dt$ et $\dfrac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \geq 1 - x^{-2}$.
Enfin on obtient $1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1 \quad$ pour tout $x > 0$.

(c) Comme $1 - \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ alors par encadrement, $\dfrac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ c'est à dire que

$$1 - \Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

(d) On reprend $1 - x^{-2} \leq \dfrac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$
et comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, pour $x > 1$ on aura $1 - x^{-2} > 0$ et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq \ln\left(\frac{x(1 - \Phi(x))}{\varphi(x)}\right) \leq 0$$

tous les termes du ln étant strictement positifs,

$\ln\left(\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)}\right) = \ln(x) + \ln(1-\Phi(x)) - \ln(\varphi(x)) = \ln(x) - g(x) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$

$\ln\left(\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)}\right) = \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2}$.

d'où l'inégalité demandée : $\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq \ln(x) - g(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} \leq 0$
dans laquelle on isole $g(x)$:

$$\frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} - \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2/2} \geq \frac{g(x)}{x^2/2} \geq \frac{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{x^2}{2}}{x^2/2}$$

Le minorant et le majorant tendent vers 1 facilement donc, par encadrement, $\dfrac{g(x)}{x^2/2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

2 Partie 2 Inégalité de transport.

1. h est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues.
   $h(t) = t\ln(t) - t + 1 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 = h(0)$ donc h est continue en 0 et sur $[0,+\infty[$.
   Pour déterminer son signe, on étudie ses variations :
   h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $h'(t) = 1 + \ln(t) - 1 = \ln(t)$ d'où le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$h'(t))$	‖	$-$	0	$+$	‖
$h(t)$	‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

   et donc $h \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
   Donc h est une application continue de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.

2. $g(x) = -\ln(1-\varphi(x))$ et $f(x) = e^{-x}$ pour $x > 0$ et 0 sinon. On a vu que $1-\varphi(x) > 0$.
   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

   $g'(x) = -\frac{1}{1-\varphi(x)}(-\varphi'(x)) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$.

   Et comme $1-\varphi(x) \in]0,1[$ alors $\ln(1-\varphi(x)) < 0$ et $g(x) > 0$ donc :
   $f(g(x)) = e^{-g(x)} = e^{\ln(1-\varphi(x))} = 1-\varphi(x)$.

   Donc pour tout x réel, $g'(x)f(g(x)) = \varphi(x)$.

3. L'intégrale $K(f,\varphi)$ est impropre en $\pm\infty$.

$$\varphi(x)h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \varphi(x)h(0) = \varphi(x) \text{ si } x \leq 0$$

   L'intégrale converge donc en $-\infty$ car $\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx$ converge (et vaut 1/2). D'autre part pour $x \geqslant 0$:

   $\varphi(x)h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \varphi(x)h\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) = e^{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x)$.

   et en $+\infty$ les intégrales de $x \to e^{-x}$ et de $x \to \varphi(x)$ convergent.

   Reste $e^{-x}\ln\left(\frac{e^{-x}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}\right) = e^{-x}\left(-x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\right)$
   et comme les intégrales de $x \to x^k e^{-x}$ convergent pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $K(f,\varphi)$ converge bien.

La suite est absolument infâme, et il faut la fuir comme la peste le jour du concours ! Voilà le calcul :

$$\begin{aligned}
K(f,\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, h\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ que l'on découpe en 0 pour } f. \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, h(0)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \left[e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) - e^{-x} + \varphi(x)\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \ln\left(\frac{e^{-x}}{\varphi(x)}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \text{ (lois normale et exponentielle)} \\
&= 1 - 1 + \int_{0}^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx
\end{aligned}$$

que l'on transforme par le changement de variable $x = g(t)$ sur $[M, N]$ avec $M \to 0$ et $N \to +\infty$.
on se souvient que g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.

$x \to e^{-x} \ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ est continue sur $g\left[g^{-1}(M), g^{-1}(N)\right]$ et g est C^1 sur $\left[g^{-1}(M), g^{-1}(N)\right]$;
$\int_M^N f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx = \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} f(g(t)) \ln\left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))}\right) g'(t)\, dt = \int_{g^{-1}(M)}^{g^{-1}(N)} \varphi(t) \ln\left(\frac{f(g(t))}{\varphi(g(t))}\right) dt.$

car $g'(x) f(g(x)) = \varphi(x)$.
or $g^{-1}(M) \xrightarrow[M \to 0]{} -\infty$ et $g^{-1}(N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$ et comme $K(f,\varphi)$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx$ converge et

$$K(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx$$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ est impropre en $\pm\infty$.
   - En $+\infty$: on a $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$ alors $x - g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$, puis $\varphi(x)(x - g(x))^2 \sim \frac{x^4}{4}\varphi(x)$.

     L'énnoncé nous donne la convergence de $\int_0^{+\infty} x^4 \varphi(x)\, dx$ (moments de la loi normale, qu'on sait d'ailleurs prouver sans problème).
     Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ converge.

   - $\varphi(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ donc $g(x) = -\ln(1 - \varphi(x)) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$. En suite on a :

     $\varphi(x)(x - g(x))^2 = \varphi(x) x^2 \left(1 - \frac{g(x)}{x}\right)^2 \underset{x \to -\infty}{\sim} \varphi(x) x^2$.

     L'énnoncé nous donne la convergence de $\int_{-\infty}^{0} x^2 \varphi(x)\, dx$
     Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ converge.

   Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ converge.

   $Y = g(X)$ et donc $(X - Y)^2 = (X - g(X))^2$.
   D'après le théoréme de transfert (hypothèses :
   - $x \to (x - g(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$; (un nombre fini de discontinuité est permis)
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$ est absolument convergente ;
   - X a pour densité φ donc :

   $(X - Y)^2$ a une espérance et $E\left((X - Y)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(x - g(x))^2\, dx$.

5. L'intégrale est impropre en $\pm\infty$ et $g'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)}$.

– en $+\infty$ on a $1-\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$ alors $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \sim x$ quand $x \to +\infty$.

  On en déduit que $1-g'(x) = 1-x+o(x) = -x+o(x) \sim -x$, puis $\varphi(x)(1-g'(x)) \sim -x\varphi(x)$ dont l'intégrale converge en $+\infty$ et par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ converge également.

– En $-\infty$: $\varphi(x) \to 0$ et $1-\Phi(x) \to 1$ donc $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} \to 0$ et $\varphi(x)(1-g'(x)) \sim \varphi(x)$ et par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ converge également.

Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ converge et est égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx$.

6. On démontre le résultat suggéré :
Soit $k(u) = u-1-\ln(u)$
k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $k'(u) = 1-\frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$ d'où le tableau de variations :

u	0		1		$+\infty$
$k'(u))$	‖	$-$	0	$+$	‖
$k(u)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖

donc $k \geq 0$ et $\ln(u) \leq u-1$ pour tout u réel strictement positif.

On utilise alors $g'(x)\,f(g(x)) = \varphi(x)$:

$K(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{f(g(x))}{\varphi(g(x))}\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\frac{\varphi(x)/g'(x)}{\varphi(g(x))}\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\varphi(x)\ln\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(g(x))}\right] - \varphi(x)\ln(g'(x))\right] dx.$

car les termes du ln sont positifs.
Et comme $\ln(g'(x)) \leq g'(x)-1$ et $-\varphi(x) \geq 0$ on a donc $-\varphi(x)\ln(g'(x)) \geq \varphi(x)(-g'(x)+1)$
les intégrales étant convergentes,

$$K(f,\varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln[\varphi(x)/\varphi(g(x))]\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(-g'(x)+1)\,x\varphi(x)\,dx$$

7. Nouvelle question infâme, à fuir comme la peste.

On transforme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\,dx$ par intégration par parties :
Soit $u'(x) = 1-g'(x)$: $u(x) = x-g(x)$: $v(x) = \varphi(x)$ et $v'(x) = -x\varphi(x)$ avec u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc :

$\int_M^N \varphi(x)(1-g'(x))\,dx = [(x-g(x))\,\varphi(x)]_M^N - \int_M^N -(x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx$

$\int_M^N \varphi(x)(1-g'(x))\,dx = (N-g(N))\,\varphi(N) - (M-g(M))\,\varphi(M) + \int_M^N (x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx.$

Il faut déterminer les limites quand $M \to -\infty$ et $N \to +\infty$.
Préliminaire : Comme $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ on a donc $x^n\varphi(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.
(Au choix,
– on fait entrer le x dans l'exponentielle $x^n = e^{n\ln(x)}$ pour $x > 0$ et changement de variable $t = -x$ pour $x < 0$, puis on factorise dans l'exponentielle
– on fait un changement de variable $t = x^2/2$ et $x = \pm\sqrt{2}t^{n/2}$d'où $xe^{-x^2/2} = \sqrt{2}t^{n/2}/e^t$ avec la croissance comprée $t^{n/2} = o(e^t)$

Et comme $g(N) \sim \frac{N^2}{2}$ on a comme précédemment $(N-g(N))\,\varphi(N) = \varphi(N)\,\frac{N^2}{2}(\cdots) \to 0$ quand $N \to +\infty$
Avec $g(M) \to 0$ quand $M \to -\infty$ on a $(M-g(M))\,\varphi(M) = \varphi(M)\,M(\cdots) \to 0$ quand $M \to -\infty$.
Enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx$ converge par comparaison de fonctions positives là encore.

On obtient enfin $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(1-g'(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx$.
Donc

$$K(f,\varphi) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln\left[\varphi(x)/\varphi(g(x))\right] dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x-g(x))\,x\varphi(x)\,dx$$

On développe

$$\ln\left[\varphi(x)/\varphi(g(x))\right] = \ln\left[\frac{e^{-x^2/2}}{e^{-g(x)^2/2}}\right] = -\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2}$$

et il reste donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{g(x)^2}{2} + x^2 - xg(x)\right] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(x^2 - 2xg(x) + g(x)^2\right)\varphi(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(x+g(x))^2\,\varphi(x)\,dx \\
&= E\left((X-Y)^2\right)
\end{aligned}$$