Correction DM ESSEC n° 7

Exercice :

1. E est de dimension $n+1$ et sa base canonique est la famille $(P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ où $P_i(x) = x^i$.

2. Pour tous $P, Q \in E$ et tout réel λ,

$$d(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda d(P) + d(Q)$$

donc d est linéaire.

De plus pour tout $P \in E$, $\deg P \leqslant n$ donc $\deg d(P) = \deg(P') \leqslant n-1$, et $d(P) \in E$, donc d est une application linéaire de E dans E, donc un endomorphisme de E.

3. • $P \in \ker d \Leftrightarrow d(P) = 0 \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P = constante$.
Ainsi, $\boxed{\ker d = \mathbb{R}_0[X]}$ et $\boxed{\dim(\ker d) = 1}$.
Par théorème du rang, on a donc $\dim(\operatorname{Im} d) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker d) = n$ or on remarque que $\operatorname{Im} d \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car pour tout $P \in E$, $\deg d(P) = \deg(P') \leqslant n-1$:
conclusion : $\operatorname{Im} d \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ces deux e.v. ont même dimenion donc $\operatorname{Im} d = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

4. Deux possibilités :
• Soit on passe par la matrice : on écrit la matrice A de d dans la base canonique de E. On remarque qu'elle est trinagulaire supérieure avec des coefficients tous nuls sur la diagonale donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$.
• Soit on utilise la définition des valeurs propres d'une application linéaire :
λ est valeur propre de d si et seulement s'il existe $P \neq 0$ tel que $d(P) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \lambda P$ mais comme $P \neq 0$ alors $deg(P') < deg(P)$ donc si $\lambda \neq 0$, $deg(P') < deg(P) = deg(\lambda P)$: contradiction.
La seule valeur propre possible de d est donc 0, qui est bien valeur propre de d car $\ker d \neq \{0\}$ d'après 3.

Dans tous les cas $\operatorname{Sp} d = \{0\}$ et $E_0(d) = \ker d$.

5. (a) $d^k(P) = d(d(....d(P))) = P^(k)$.
$P \in \ker d^k \Leftrightarrow P^{(k)} = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. $\boxed{\ker d^k = \mathbb{R}_{k-1}[X]}$.

• Soit enfin $P \in d(\ker d^k)$, alors il existe Q dans $\ker d^k$ tel que $P = d(Q)$.

On en déduit que $d^k(P) = d^k(d(Q)) = d^{k+1}(Q) = d(d^k(Q)) = d(0) = 0$, et $P \in \ker d^k$.

On en déduit bien que $d(\ker d^k) \subset \ker d^k$.

(b) Si $\deg P = r$, on a de manière évidente pour tout $k \in [\![0; r]\!]$, $\deg(d^k(P)) = r - k$ (donc aucun n'est nul puisque le degré minimal est 0, qui représente une constante non nulle).

On pose alors $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{r} \lambda_i d^i(P) = 0$.

Supposons que l'un au moins des λ_i soit non nul, on peut alors poser j le minimum des indices pour lesquels $\lambda_i \neq 0$. La relation s'écrit alors :

$$\lambda_j d^j(P) + \sum_{i=j+1}^{r} d^i(P) = 0$$

avec le premier terme de degré $r - j \geqslant 0$ (la constante est non nulle) et la somme qui représente un polynôme de degré inférieur à $r - j - 1$, donc on obtient que le polynôme nul est de degré $r - j$, ce qui est absurde. On en déduit finalement que la famille est libre.

6. (a) Soit Q un polynôme non nul de F, alors comme $\dim(F) = 1$, $F = \mathrm{Vect}(Q)$.

On a alors $d(Q) \in F = \mathrm{Vect}(Q)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(Q) = \lambda Q$.

Q est donc un vecteur propre de d associé à la valeur propre λ, donc $\lambda = 0$ puisque $\mathrm{Sp}(d) = \{0\}$, donc $Q \in E_0(f) = \mathrm{Vect}(P_0)$.

On en déduit que :

$$F \subset \mathrm{Vect}(P_0) \quad \text{et} \quad \dim F = \dim \mathrm{Vect}(P_0) = 1 \quad \text{donc} \quad F = \mathrm{Vect}(P_0) = \mathbb{R}_0[X].$$

(b) Supposons que F ne contient aucun polynôme de degré supérieur ou égal à 1, alors $F \subset \mathbb{R}_0[X]$ de dimension 1 et $\dim F \leqslant 1$, ce qui est absurde.

Soit alors Q un polynôme de degré r supérieur ou égal à 1, la question 5) montre que la famille $(d^i(Q))_{0 \leqslant i \leqslant r}$ est libre, et ce sont tous des vecteurs de F puisque $d(F) \subset F$ donne :

$$Q \in F \Longrightarrow d(Q) \in F \subset d^2(Q) \in F \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow d^k(Q) \in F.$$

On en déduit que $r \leqslant 1$, sinon on obtient une famille libre de trois vecteurs ou plus dans un espace de dimension 2, ce qui est absurde.

Enfin on sait que $r \geqslant 1$, donc $r = 1$ et la famille $(Q, d(Q))$ est libre et de cardinal 2 donc c'est une base de F.

Enfin comme Q est de dimension 1, il s'écrit $Q = aP_1 + bP_0$ avec $a \neq 0$, donc :

$$F = \mathrm{Vect}(aP_1 + bP_0, aP_0) = \mathrm{Vect}(aP_1 + bP_0, P_0) = \mathrm{Vect}(aP_1, P_0) = \mathrm{Vect}(P_1, P_0) = \mathbb{R}_1[X].$$

<u>Problème</u> :ESSEC I 2013

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine.

On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurance sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$, et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :
$$X = \sum_{k=1}^{N} U_k$$
et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0.
On dit que X suit une loi composée.
- Pour tout entier naturel j, on pose $p_j = \mathrm{P}(N = j)$, $q_j = \mathrm{P}(U_1 = j)$ et $r_j = \mathrm{P}(X = j)$.

Partie I - Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent une loi de Bernouilli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

1. X_n est une somme de n variables de Bernouilli indépendantes et de même paramètre p donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

2. Avec le système complet d'évènements $(N=n)_{n\geqslant 0}$, les probabilités totales donnent :

$$r_j = \mathrm{P}(X=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\,\mathrm{P}_{(N=n)}(X=j)$$

On remplace X par sa valeur :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\,\mathrm{P}_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{N} U_i = j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\,\mathrm{P}_{(N=n)}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = j\right)$$

puis N est indépendantes des variables (U_i) donc :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\,\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i = j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X_n=j)p_n.$$

3. Dans cette question 3, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0;1[$.
Soit j un entier naturel.

(a) On a alors $N(\Omega) = [\![0;m]\!]$ donc $p_n = 0$ pour $n \geqslant m$ et enfin :

$$r_j = \sum_{n=0}^{m} p_n\,\mathrm{P}(X_n=j)$$

avec pour tout $n \in [\![0;m]\!]$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $n \leqslant m < j$ donc $j \notin X_n(\Omega)$ donc :

$$r_j = \sum_{n=0}^{m} p_n \times 0 = 0.$$

Remarque : en comprenant bien l'énoncé, on a au maximum $N=m$ sinistres, chacun coûtant 0 ou 1 à l'entreprise donc la charge sinistrale totale ne peut excéder m, ce qui explique le résultat obtenu.

(b) Sur le même principe, $j \in X_n(\Omega)$ si et seulement si $j \leqslant n$, donc :

$$r_j = \sum_{n=0}^{j-1} p_n \times 0 + \sum_{n=j}^{m} p_n \times \mathrm{P}(X_n=j) = \sum_{n=j}^{m}\left(\left[\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}\right] \times \left[\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\right]\right)$$

$$r_j = \sum_{n=j}^{m}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}\binom{m}{n}\pi^n(1-\pi)^{m-n}.$$

(c) On simplifie :

$$\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$$

et

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \times \frac{(m-j)!}{(n-j)!(m-j-n+j)!} = \frac{m!}{j!(n-j)!(m-n)!}$$

et les deux quantités sont égales.

(d) On remplace dans l'expression de r_j :

$$r_j = \sum_{n=j}^{m}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{n-j}\binom{m-j}{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$$

puis on sort le facteur constant $p^j\binom{m}{j}$ et on change d'indice : $\ell = n-j$:

$$r_j = \binom{m}{j}p^j\sum_{\ell=0}^{m-j}(1-p)^{\ell}\binom{m-j}{\ell}\pi^{\ell+j}(1-\pi)^{m-j-\ell}$$

On sort le facteur π^j et on rassemble π^ℓ avec p^ℓ :

$$r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j\sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}\Big[(1-p)\pi\Big]^{\ell}(1-\pi)^{m-j-\ell}.$$

(e) La formule du binôme de Newton donne alors :

$$\sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \Big[(1-p)\pi\Big]^{\ell} (1-\pi)^{m-j-\ell} = \Big([(1-p)\pi] + [1-\pi]\Big)^{m-j} = \Big(1-p\pi\Big)^{m-j}$$

puis comme $r_j = 0$ pour $j > m$ et $r_j \neq 0$ pour $j \in [\![0;m]\!]$, $X(\Omega) = [\![0;m]\!]$ et :

$$\forall j \in [\![0;m]\!], \quad \mathrm{P}(X=j) = r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \Big(1-p\pi\Big)^{m-j}$$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$.

4. On suppose dans cette question 4 que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

(a) On reprend le résultat général de la question 2, et on remplace par les nouvelles valeurs :

Comme à la question 3)b), $\mathrm{P}(X_n = j) = 0$ lorsque $j > n$ donc pour $n \leqslant j-1$ et on obtient :

$$r_j = \sum_{n=j}^{+\infty} p_n \, \mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{n=j}^{+\infty} e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{j} p^j \, (1-p)^{n-j}$$

$$r_j = e^{-\lambda} p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \lambda^{n-j+j} \, (1-p)^{n-j} \, \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \Big[\lambda(1-p)\Big]^{n-j}.$$

(b) On effectue le changement d'indice $k = n-j$ et on fait apparaître une série exponentielle qui converge donc :

$$\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \Big[\lambda(1-p)\Big]^{n-j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\big[\lambda(1-p)\big]^k}{k!} = e^{\lambda(1-p)}$$

ce qui donne $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X=j) = r_j = e^{-\lambda+\lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!}$$

donc on reconnaît que

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$$

Partie II - La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombre réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. (a) i. Posons $u'(t) = (x-t)^n = -(-1)(x-t)^n$ et $v(t) = (1-t)^{-c-n-1}$, alors $u(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$ et $v'(t) = (-c-n-1)(-1)(1-t)^{-c-n-2} = (c+n+1)\frac{1}{(1-t)^{c+n+2}}$.
u et v sont de classe C^1 sur $[0,1[$ comme composées de fonctions de classe C^1 avec $1-t>0$ car $t<1$ et $x-t > x-1 > 0$ car $x<1$. Donc par intégration par parties :
$\int_0^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)dt = \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{c+n+1}}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{(c+n+1)(x-t)^{n+1}}{(n+1)(1-t)^{c+n+2}}dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1}$

ii. • **Initialisation :**
$\sum_{k=0}^{0} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c}{0} I_0 = 1 + c\int_0^x (1-t)^{-c-1} dt = 1 + c\left[-\frac{(1-t)^{-c}}{-c}\right]_0^x = 1 + (1-x)^{-c} - 1 = \frac{1}{(1-x)^c}$.

• **Hérédité :**
Sopposons qu'il existe un rang n tel que :

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n$$

alors

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{c+n+1}{n+1} I_{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + \frac{c}{n+1}\binom{c+n}{n}$$

avec $\frac{c}{n+1}\binom{c+n}{n} = \binom{c+n}{n+1} = \binom{c+n+1-1}{n+1}$ et $\frac{c+n+1}{n+1}\binom{c+n}{n} = \binom{c+n+1}{n+1}$ donc

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + \binom{c+n+1-1}{n+1} x^{n+1} + c\binom{c+n+1}{n+1} I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n+}{n+1}$$

(b) Commençons par la gauche : on a $0 \leqslant t \leqslant x < 1$ donc :

$$x - t \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 1 - t > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{x-t}{1-t} \geqslant 0$$

Ensuite pour la droite on écrit :

$$\frac{x-t}{1-t} \leqslant x \iff \frac{x-t-x(1-t)}{1-x} \leqslant 0 \iff \frac{t(x-1)}{1-t} \leqslant 0$$

Or on a vu que le dénominateur est strictement positif, t est positif et $0 \leqslant x < 1$ donc $x - 1 < 0$ et par produit et quotient on obtient bien :

$$\frac{t(x-1)}{1-t} \leqslant 0 \iff \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

et on rassemble :

$$0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x$$

Ensuite on le place à la puissance n (c'est une fonction croissante) :

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$$

puis on multiplie par $\frac{1}{(1-t)^{c+1}} \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$$

Enfin on sait que $t \leqslant x$ donc $1 - t \geqslant 1 - x > 0$ et en passant à l'inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puis à la puissance $c + 1$:

$$\frac{1}{(1-t)} \leqslant \frac{1}{1-x} \iff \frac{1}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{c+1}}$$

et en multipliant par $x^n \geqslant 0$ on obtient finalement :

$$0 \leqslant \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

On intègre alors entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant et on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x 1 dt$$

et enfin :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\binom{c+n}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i) = \left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i}\right) \times \left(\prod_{i=0}^{n-1}(c+n-i)\right)$$

On rassemble :

$$\binom{c+n}{n} = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{c+n-i}{n-i} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{c}{n-i}\right)$$

Enfin on effectue le changement d'indice $k = n-i$ et on obtient :

$$\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$$

ii. On considère la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t) - t$ sur $\mathbb{R}_+$, qui est dérivable et :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-1-t}{1+t} = -\frac{t}{1+t} < 0$$

donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g(0) = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) \leqslant g(0) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1+t) \leqslant t$$

iii. contrairement à ce qu'on pourrait croire, il ne faut pas appliquer le i) mais écrire : par décroissance de $t \mapsto 1t$,

$$\forall t \in [k-1;k], \quad \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{k}$$

qu'on intègre entre $k-1$ et k avec des bornes croissantes :

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,dt = \ln(k) - \ln(k-1) \geqslant \frac{1}{k}\int_{k-1}^{k}dt = \frac{1}{k}$$

et on obtient donc :

$$\frac{1}{k} \leqslant \ln k - \ln(k-1)$$

On somme alors ces inégalités pour k allant de 2 à n et on obtient par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}(\ln k - \ln(k-1)\ ) = \ln(n) - \ln 1 = \ln n$$

puis on ajoute le terme pour $k = 1$, qui vaut $\frac{1}{1} = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$$

iv. On calcule :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k}\right)$$

On applique ensuite le i) à $t_k = \frac{c}{k}$ pour k allant de 1 à n et on somme les inégalités :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{c}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{c}{k}$$

Enfin on applique le iii) :

$$\ln\left[\binom{c+n}{n}\right] \leqslant c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant c(1+\ln n)$$

On compose par l'exponentielle, comme l'exponentielle est positive on obtient un encadrement qu'on multiplie par $x^{n+1} \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \left[\binom{c+n}{n}\right]x^{n+1} \leqslant e^{c(1+\ln n)}x^{n+1}$$

On cherche la limite du membre de droite en $+\infty$ en l'écrivant sous une seule exponentielle :

$$e^{c(1+\ln n)}x^{n+1} = e^{(n+1)\ln(x)+c\ln n+c} = e^{n\left(\ln x+\frac{\ln x}{n}+c\frac{\ln n}{n}+\frac{c}{n}\right)}$$

Or par croissances comparées $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(\ln x + \frac{\ln x}{n} + c\frac{\ln n}{n} + \frac{c}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln x < 0$ (car $x < 1$) ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\ln x + \frac{\ln x}{n} + c\frac{\ln n}{n} + \frac{c}{n}\right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} e^{c(1+\ln n)}x^{n+1} = 0.$$

Enfin par encadrement on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\binom{c+n}{n}\right] x^{n+1} = 0.$$

(d) On reprend l'encadrement de I_n obtenu précédemment :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

et on le multiplie par $c\binom{c+n}{n} \geqslant 0$:

$$0 \leqslant c\binom{c+n}{n} I_n \leqslant \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \times \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

On vient de voir que le membre de droite converge vers 0 car $\frac{c}{(1-x)^{c+1}}$ est une constante, donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n} I_n = 0.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c\binom{c+n}{n} I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^c}$$

donc la série de terme général $\binom{c+k-1}{k}x^k$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}.$$

6. Les p_k sont tous positifs, vérifions que leur somme vaut 1 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r = p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k}(1-p)^k = p^r \frac{1}{[1-(1-p)]^r} = 1$$

avec la formule précédente appliquée pour $c = r$, qui est bien strictement positif.

Donc la suite (p_k) définit bien une loi de probabilité discrète.

7. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètre 1 et p, alors $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \mathrm{P}(Y+1=k) = \mathrm{P}(Y=k-1) = p_{k-1} = \binom{1+(k-1)-1}{k-1}(1-p)^{k-1}p^1 = (1-p)^{k-1}p$$

donc on reconnaît que

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

8. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0;1[$.

(a) On simplifie : pour $k \geqslant 2$,

$$k\binom{r+k-1}{k} = \frac{k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r+k-1-i) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(r+k-1-i)\times[r+k-1-(k-1)] = r\binom{r+k-1}{k-1}.$$

et pour $k=1$, on lé vérifie sans problème également.

(On l'avait en fait déjà vu précédemment à la fin de la question 6)a)).

(b) On considère alors la série suivante, dont le premier terme est nul donc on le retire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = rp^r \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{r+k-1}{k-1}(1-p)^k$$

On effectue le changement d'indice $k' = k-1$ pour se ramener au binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = rp^r \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r+k}{k}(1-p)^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = rp^r(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{(r+1)+k-1}{k}(1-p)^k$$

et d'après la formule du binôme négatif, cette série à termes positifs converge donc converge absolument, et Z admet une espérance qui vaut :

$$E(Z) = rp^r(1-p)\times\frac{1}{[1-(1-p)]^{r+1}} = \frac{r(1-p)}{p}$$

(c) Par théorème de transfert, sous réserve de convergence (on enlève les deux premiers termes nuls),

$$E[Z(Z-1)] = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^k p^r \binom{r+k-1}{k} = p^r r \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(1-p)^k\binom{r+k-1}{k-1}$$

On effectue le changement d'indice $k' = k-1$, on obtient :

$$E[Z(Z-1)] = p^r r \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k+1}\binom{r+k}{k} = p^r r(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k \times k\binom{(r+1)+k-1}{k}$$

On réutilise le 9)a) :

$$E[Z(Z-1)] = p^r r(r+1)(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\binom{(r+1)+k-1}{k-1}$$

On change à nouveau d'indice :

$$E[Z(Z-1)] = r(r+1)p^r(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k+1}\binom{(r+1)+k}{k} = r(r+1)p^r(1-p)^2\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k\binom{(r+2)+k-1}{k}$$

et par formule du binôme négatif, cette série à termes positifs converge absolument donc $Z(Z-1)$ admet une espérance et :

$$E[Z(Z-1)] = r(r+1)p^r(1-p)^2\times\frac{1}{p^{r+2}} = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}$$

Par suite la linéarité de l'espérance assure que Z^2 admet une espérance et Z admet donc une variance, et la formule de Koenig-Huyghens donne :

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = E(Z^2 - Z + Z) - [E(Z)]^2 = E[Z(Z-1)] + E(Z) - [E(Z)]^2$$

soit :

$$V(Z) = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{rp(1-p)}{p^2} - \frac{r^2(1-p)^2}{p^2} = \frac{r(1-p)\left[(r+1)(1-p)+p-r(1-p)\right]}{p^2}$$

$$V(Z) = \frac{r(1-p)\left[(1-p)[r+1-r]+p\right]}{p^2} = \frac{r(1-p)\left[(1-p)+p\right]}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Partie III - Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème ; la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathrm{P}(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

9. *Détermination des lois de Panjer.*

   (a) Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$, on a $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$:

   Initialisation : $p_0 \prod\limits_{i=1}^{1} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0(a+b) = p_1$ d'après la relation de récurrence, et la propriété est vraie pour $k = 1$.

   Hérédité : On suppose qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right)$ alors :

   $$p_{k+1} = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k = p_0 \left(a + \frac{b}{k+1}\right) \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)$$

   et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right).$$

   (b) Puisque $a = 0$, on obtient :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{i}\right) = p_0 \frac{b^k}{k!}$$

   qu'on vérifie facilement pour $k = 0$ également, et comme la somme des probabilités doit valoir 1 on a :

   $$p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^b = 1$$

   donc $p_0 = e^{-b}$ et enfin :

   $$N(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(N = k) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$$

   donc on reconnaît bien :

   $$N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$$

   (c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

      i. Supposons que tous les p_k sont strictement positifs. Alors on a :

      $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} > 0$$

      Or $\frac{b}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ donc on obtient par passage à la limite :

      $$a \geqslant 0$$

      qui est absurde.

On en déduit qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p_\ell = p_0 \prod_{i=1}^{\ell} \left(a + \frac{b}{i}\right) = 0.$$

Ce produit est nul donc l'un au moins de ses facteurs est nul. Montrons que ce n'est pas p_0, par l'absurde :

Si $p_0 = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = 0$ donc la somme des probabilités ne vaut pas 1, c'est absurde.

Donc il existe un (unique, car les facteurs sont tous distincts) $i_0 \geqslant 1$ tel que

$$a + \frac{b}{i_0} = 0.$$

et on obtient :

$$\forall k < i_0, \quad p_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant i_0, \quad p_k = 0$$

selon que le facteur $a + \frac{b}{i_0}$ est ou non dans le produit.

Enfin en posant $r = i_0 - 1 \geqslant 0$, il existe bien un unique $r \geqslant 0$ tel que :

$$\forall k \leqslant r, \quad p_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall k > r, \quad p_k = 0$$

ii. On a vu que $r = i_0 - 1$ donc $i_0 = r + 1$ et de plus :

$$a + \frac{b}{i_0} = 0 \Longleftrightarrow a + \frac{b}{r+1} = 0 \Longleftrightarrow \frac{b}{r+1} = -a$$

et enfin on obtient bien :

$$b = -a(r+1)$$

iii. On a alors pour tout $k \in [\![0; r]\!]$,

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} a \left(1 - \frac{r+1}{i}\right) = p_0 a^k \prod_{i=1}^{k} \frac{i-r-1}{i} = \frac{p_0 a^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} (i-r-1)$$

$$p_k = \frac{p_0 a^k (-1)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} (r+1-i) = \frac{p_0 (-a)^k}{k!} \times \frac{r!}{(r-k)!} = p_0 (-a)^k \binom{r}{k}.$$

iv. On a $N(\Omega) = [\![0; r]\!]$ et on obtient la valeur de p_0 en sommant pour k allant de 0 à r, ce qui doit donner 1 :

$$p_0 \sum_{k=0}^{r} (-a)^k \times 1^{r-k} \binom{r}{k} = p_0 \left(1-a\right)^r = 1$$

donc

$$p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$$

On en déduit ensuite que pour tout k on a :

$$p_k = \frac{(-a)^k \times 1^{r-k}}{(1-a)^r} \binom{r}{k} = \binom{r}{k} \left(\frac{-a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}$$

donc on reconnaît que :

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(r, \frac{-a}{1-a}\right)$$

Enfin on exprime r en fonction de a et b :

$$b = -a(r+1) \Longleftrightarrow r + 1 = -\frac{b}{a} \Longleftrightarrow r = -\frac{b}{a} - 1 = \frac{a+b}{-a}$$

et enfin $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{a+b}{-a}, \frac{-a}{1-a}\right)$.

(d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

i. On a obtenu précédemment que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^{k} \frac{b+ai}{i} = \frac{p_0}{k!} \prod_{i=1}^{k} \left[a\left(\frac{b}{a} + i\right)\right] = \frac{p_0}{k!} a^k \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{b}{a} + i\right)$$

Comme le résultat à trouver avec $\binom{\frac{b}{a}+b}{k}$ donne un produit de la forme $\left(\frac{b}{a} + k - i\right)$ on va poser pour le faire apparaître :

$$i = k - i' \Longleftrightarrow i' = k - i$$

et on obtient bien :

$$p_k = \frac{p_0}{k!} a^k \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{b}{a} + k - i\right) = p_0 a^k \binom{\frac{b}{a} + k}{k}$$

ii. Comme la somme des termes doit faire 1, la formule du binôme négatif donne :

$$p_0 \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \binom{\frac{b}{a} + k}{k} = p_0 \times \frac{1}{(1-a)^{\frac{b}{a}+1}}$$

puis en posant $r = \frac{b}{a} + 1$ et $p = 1 - a$ on a :

$$N(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(N = k) = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$$

donc N suit la loi binomiale négative de paramètres r et p donc de paramètres $r = \frac{b}{a} + 1$ et $p = 1 - a$.

10. On teste les formules dans les 3 cas :
   - Si $a = 0$, $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ donc N admet une espérance et une variance et $E(N) = V(N) = b$ ce qui correspond bien puisque :
   $$\frac{0+b}{1-0} = b \quad \text{et} \quad \frac{0+b}{(1-0)^2} = b$$
   - Si $a < 0$, $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{a+b}{-a}, \frac{-a}{1-a}\right)$ donc N admet une espérance et une variance et :
   $$E(N) = \frac{a+b}{-a} \times \frac{-a}{1-a} = \frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N) = E(N) \times \left(1 - \frac{-a}{1-a}\right) = \frac{(a+b)(1-a+a)}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$
   - Si $a > 0$, N suit une loi binomiale négative donc admet une espérance et une variance et :
   $$E(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{1-a} = \frac{a+b}{1-a} \quad \text{et} \quad V(N) = E(N)1 - a = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

   et le résultat est bien valable dans les trois cas.

Partie IV - L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [U_k = 0]\right)$$

et par indépendance des variables (U_k) on obtient :

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(U_k = 0) = (q_0)^n$$

car les (U_k) suivent toutes la même loi.

On en déduit que :

$$r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \, \mathrm{P}(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (q_0)^n.$$

12. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

(a) Sachant que $(X_n = j)$, X_n est certaine égale à j donc :

$$E_{(X_n=j)}(X_n) = j$$

De plus par linéarité de l'espérance on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} E_{(X_n=j)}(U_k) = j$$

Or les variables U_k suivent toutes la même loi et "rentrent en compte de manière symétrique dans X_n" donc les lois conditionnelles des U_k (pour k allant de 1 à n uniquement !) sachant $X_n = j$ sont les mêmes, et on obtient :

$$nE_{(X_n=j)}(U_k) = j \Longleftrightarrow E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}.$$

(b) On sait que :

$$r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \, \mathrm{P}(X_n = j)$$

avec $\mathrm{P}(X_0 = j) = 0$ car X_0 est certaine égale à 0 puis comme N suit la loi de Panjer de paramètre a et b on a :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} \left(a + \frac{b}{n}\right) \mathrm{P}(X_n = j)$$

On calcule alors

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) = a + \frac{b}{j}E_{(X_n=j)}(U_1) = a + \frac{b}{j} \times \frac{j}{n} = a + \frac{b}{n}$$

et on peut donc remplacer :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) \mathrm{P}(X_n = j)$$

(c) Par théorème de transfert on a :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \mathrm{P}_{(X_n=j)}(U_1 = i)$$

Or X_n est la somme des U_i donc est supérieure ou égale à U_1 : pour $i > j$, on a donc $\mathrm{P}_{(X_n=j)}(U_1 = i) = 0$ donc :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \mathrm{P}_{(X_n=j)}(U_1 = i)$$

On multiplie par $\mathrm{P}(X_n = j)$ qu'on rentre dans la somme et on reconnaît :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) \mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \mathrm{P}_{(X_n=j)}(U_1 = i) \, \mathrm{P}(X_n = j)$$

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right) \mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{bi}{j}\right) \mathrm{P}\left[(U_1 = i) \cap (X_n = j)\right]$$

Or $X_n = U_1 + \sum_{k=2}^{n} U_k = U_1 + Y_n$, où Y_n suit la même loi que X_{n-1} et est indépendante de U_1 donc :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathrm{P}\left[(U_1 = i) \cap (Y_n = j - i)\right]$$

puis par indépendance :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathrm{P}(U_1 = i)\,\mathrm{P}(Y_n = j - i)$$

et enfin puisque Y_n a la même loi que X_{n-1} :

$$E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathrm{P}(U_1 = i)\,\mathrm{P}(X_{n-1} = j - i).$$

(d) On reprend le calcul de r_j :

$$r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1} E_{(X_n=j)}\left(a + \frac{b}{j}U_1\right)\mathrm{P}(X_n = j) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}\left[\sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathrm{P}(U_1 = i)\,\mathrm{P}(X_{n-1} = j - i)\right]$$

On échange l'ordre des sommes :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right)\mathrm{P}(U_1 = i)\sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}\,\mathrm{P}(X_{n-1} = j - i)$$

On reconnaît alors $\mathrm{P}(U_1 = i) = q_i$, et dans la somme sur n on change d'indice avec $n' = n - 1$:

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\,\mathrm{P}(X_n = j - i)$$

Enfin on reconnaît dans cette dernière somme la valeur de $\mathrm{P}(X = j - i) = r_{j-i}$ et on obtient :

$$r_j = \sum_{i=0}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$$

On sépare alors le terme $i = 0$:

$$r_j = \sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} + a q_0 r_j \iff r_j(1 - a q_0) = \sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$$

et enfin :

$$r_j = \frac{1}{1 - a q_0}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}\right).$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombre r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

13. *Des exemples d'application.*

(a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernouilli de paramètre p.

i. On en déduit que $q_i = 0$ pour $i \geqslant 2$, $q_1 = \mathrm{P}(U_k = 1) = p$ et $q_0 = 1 - p$ ce qui donne :

$$r_j = \frac{1}{1 - a(1 - p)}\left(a + \frac{b}{j}\right) p r_{j-1} = \frac{p}{1 - a + ap}\left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}.$$

On reconnaît la relation de récurrence qui définit les lois de Panjer, donc X suit une loi de Panjer de paramètres a' et b' tels que :

$$a' = \frac{ap}{1 - a + ap} \qquad \text{et} \qquad b' = \frac{bp}{1 - a + ap}$$

On prouve en partant de $a < 1$ que $0 < \frac{p}{1-a+ap} < 1$:

$$a < 1 \Longrightarrow a(1-p) < 1-p \Longrightarrow -a(1-p) > p-1 \Longrightarrow 1-a(1-p) = 1-a+ap > p > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{p}{1-a+ap} < 1$$

puis $\frac{ap}{1-a+ap} < a < 1$ si $a > 0$, et $\frac{ap}{1-a+ap} < 0$ si $a < 0$ donc on a bien prouvé que $a' < 1$.

D'autre part on a :

$$a' + b' = \frac{(a+b)p}{1-a+ap} = (a+b) \times \frac{p}{1-a+ap}$$

est bien strictement positif comme produit de deux facteurs strictement positifs.

ii. A la question 3, N suivait une loi binomiale de paramètres m et π donc une loi Panjer de paramètres a et b tels que :

$$\frac{a+b}{-a} = m \quad \text{et} \quad \frac{-a}{1-a} = \pi$$

La deuxième équation donne facilement :

$$a = \frac{\pi}{\pi - 1}$$

puis :

$$b = -am - a = -a(m+1) = \frac{\pi(m+1)}{1-\pi}$$

On en déduit que X suit la loi de Panjer de paramètres a et b tels que :

$$a' = \frac{ap}{1-a(1-p)} = \frac{\pi p}{(\pi-1)\left(1 - \frac{\pi}{\pi-1}(1-p)\right)} = \frac{\pi p}{\pi - 1 - \pi + \pi p} = \frac{\pi p}{\pi p - 1}$$

(qui est bien strictement négatif donc X suit une loi binomiale) et

$$b' = \frac{a'}{\times a}\frac{b}{} = \frac{\pi p}{\pi p - 1} \times (-m-1)$$

D'où X suit la loi binomiale de paramètres :

$$m' = -\frac{b'}{a'} - 1 = -(-m-1) - 1 = m$$

et

$$\pi' = \frac{-a'}{1-a'} = \frac{\frac{\pi p}{1-\pi p}}{\frac{\pi p - 1 - \pi p}{\pi p - 1}} = \frac{\pi p(\pi p - 1)}{(1-\pi p)(-1)} = \pi p$$

et on retrouve bien le résultat de la question 3.

Pour la question 4, on avait supposé $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(0, \lambda)$.

Donc X suit la loi de Panjer de paramètres $a' = 0$ et $b' = \lambda p$, c'est-à-dire la loi de Poisson de paramètre λp, et on retrouve bien le résultat de la question 4).

(b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

i. La série $\sum\limits_{i \geqslant 1} \frac{p^i}{i}$ converge par théorème de comparaidon.

En effet, elle est à termes positifs et pour tout $i \geqslant 1$, on a :

$$\frac{p^i}{i} \leqslant p^i$$

avec $\sum_{i\geqslant 1} p^i$ une série géométrique convergente, car $|p| < 1$.

Cette série étant à termes strictement positifs, elle converge vers un réel $\ell > 0$, et pour tout α réel, la série $\sum_{i\geqslant 1} \alpha \frac{p^i}{i}$ converge également, et vérifie :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha \frac{p^i}{i} = \alpha\ell = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{\ell}$$

Il existe donc une unique valeur réelle pour α telle que cette série converge vers 1.

ii. On applique le résultat de la question 13 : pour tout $j \geqslant 1$, et avec $a = q_0 = 0$ cela donne :

$$r_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{bi}{j} q_i r_{j-i}.$$

On peut à présent remplacer q_i par $\alpha \frac{p^i}{i}$ et sortir les constantes de la somme :

$$r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} i \frac{p^i}{i} r_{j-i} = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}.$$

iii. Pour faire apparaître la somme donnant r_{j-1}, on applique un changement d'indice qui transformera $j - i$ en $j - 1 - i'$, donc $-i = -1 - i'$ et enfin $i' = i - 1$:

$$r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=0}^{j-1} p^{i+1} r_{j-(i+1)} = \frac{b\alpha}{j} p \sum_{i=0}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i}$$

Il reste à sortir le terme pour $j = 0$, qui vaut $p^0 r_{j-1} = r_{j-1}$ donc :

$$r_j = \frac{pb\alpha}{j} \left(r_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} \right)$$

Enfin cette somme vaut :

$$\sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} = \frac{(j-1) r_{j-1}}{b\alpha}$$

ce qui donne :

$$r_j = \frac{pb\alpha}{j} \left(r_{j-1} + \frac{(j-1)}{b\alpha} r_{j-1} \right) = r_{j-1} \left(\frac{pb\alpha}{j} + p \frac{j-1}{j} \right) = r_{j-1} \left(\frac{pb\alpha - p}{j} + p \right)$$

et enfin :

$$r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}.$$

Pour finir on a pour $j = 1$:

$$r_1 = \frac{b\alpha}{1} \sum_{i=1}^{1} p^i r_{1-i} = b\alpha p r_0 = (p + pb\alpha - p) r_0 = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{1} \right) r_0$$

et la formule est également vraie pour $j = 1$.

iv. On reconnaît alors une loi de Panjer de paramètres $a' = p > 0$ et $b' = p(b\alpha - 1)$.

Comme $a' > 0$, c'est donc une loi binomiale négative de paramètres :

$$r = \frac{b'}{a'} + 1 = b\alpha - 1 + 1 = b\alpha \qquad \text{et} \qquad p' = 1 - a' = 1 - p$$

donc :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(b\alpha, 1 - p)$$