Correction DM ESSEC n° 8

<u>Exercice</u> :Essec I 2002 Dans cet exercice, on désigne par p un nombre entier naturel non nul et par $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

1. **Étude d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_p[X]$**

   (a) On associe à toute fonction polynôme P la fonction $\widehat{P}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{P}(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt \quad \text{si } x \neq 1 \qquad \text{et} \quad \widehat{P}(1) = P(1)$$

   • Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$ et $P(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ son écriture.
   On a alors $\int_1^x P(t)dt = \left[\sum_{k=0}^{p} a_k \frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_{t=1}^{x} = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{1}{k+1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{1}{k+1}$ (constante)
   Donc la fonction $x \to \displaystyle\int_1^x P(t)dt$ est polynômiale de degré $\deg P + 1$
   Et comme $\int_1^1 P(t)dt = 0$ alors 1 est racine de ce polynôme.
   •Soit $Q(x) = \int_1^x P(t)dt$ est donc factorisable par $(x-1)$: $Q(x) = (x-1)R(x)$ avec R fonction polynôme de degré $\deg(Q) - 1 = \deg(P)$.
   Donc $\widehat{P}(x) = R(x)$ pour $x \neq 1$.
   Reste à voir si $R(1) = P(1)$....
   Astuce : en dérivant (les fonctions polynomes sont dérivables sur $\mathbb{R}$) on a
   – d'une part $Q'(x) = P(x)$ (intégrale fonction de la borne supérieure)
   – d'autre part : $Q'(x) = (x-1)R'(x) + R(x)$ et $Q'(1) = R(1)$
   Autre idée : on peut ausi passer par une écriture du polynôme qui favorise 1 via un changement de variable $x = t+1$
   $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \sum_{k=0}^{p} a_k (t+1)^k$ et en développant $P(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k t^k = \sum_{k=0}^{p} b_k (x-1)^k$
   On a alors $Q(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{1}{k+1}(x-1)^{k+1}$ d'où $R(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{1}{k+1}(x-1)^k$ et $R(1) = b_0 = P(1)$
   Donc $P(1) = R(1) = \widehat{P}(1)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $R(x) = \widehat{P}(x)$ donc $\widehat{P}$ est polynomial de degré $\deg(P)$
   Ou encore : Q est une primitive de P. Donc $Q' = P$ et donc le taux d'accroissement de Q entre 1 et x est :
   $R(x) = \frac{1}{x-1}(Q(x) - Q(1)) \to Q'(1) = P(1)$ (avec $Q(1) = 0$) on a donc $R(x) \to P(1)$ et par continuité de la fonctinpoynôme R, $R(1) = P(1)$.
   Donc
   Conclusion : $\boxed{\widehat{P} \text{ est une fonction polynôme de même degré que } P \text{ lorsque } P \neq 0.}$

   (b) On considère l'application ϕ associant à toute fonction polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_p[X]$ la fonction polynôme $\widehat{P}$ définie ci-dessus.
   ϕ est une application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$
   reste à voir la linéarité :
   Soient P_1 et $P_2 \in \mathbb{R}_p[X]$ et α et $\beta \in \mathbb{R}$.
   Pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P_1 + \beta P_2)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x (\alpha P_1 + \beta P_2)(t)dt \\
&= \frac{1}{x-1}\alpha\int_1^x P_1(t)\,dt + \frac{1}{x-1}\beta\int_1^x P_2(t)\,dt \\
&= \alpha\phi(P_1)(x) + \beta\phi(P_2)(x)
\end{aligned}$$

   Et pour $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha P_1 + \beta P_2)(1) &= (\alpha P_1 + \beta P_2)(1) \\
&= \alpha P_1(1) + \beta P_2(1) \\
&= \alpha\phi(P_1)(1) + \beta\phi(P_2)(1)
\end{aligned}$$

Donc $\phi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha\phi(P_1) + \beta\phi(P_2)$

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_p[X]}$

Pour l'injectivité :

D'après le degré, si $P \neq 0$ alors $\deg(\phi(P)) = \deg(P)$. Donc $\phi(P) \neq 0$.

Et seule 0 peut avoir une image nulle.

Donc $\ker(\phi) = 0$

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est injective}}$

Et comme les dimension du départ est de l'arrivée sont les même, le théorème du rang nous donne alors

Conclusion : $\boxed{\phi \text{ est surjective}}$ et est donc bijective.

(c) On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^x e_k(t)\,dt &= \int_1^x t^k dt = \left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{k+1}\left(x^{k+1}-1\right)\end{aligned}$$

donc, pour $x \neq 1$, $\phi(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$ écriture qui peut se factoriser en $\phi(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} x^i$

et en 1, $\phi(e_k)(1) = e_k(1) = 1 = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} 1^i$

Conclusion : $\boxed{\phi(e_k) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} e_i}$

et on a les coordonnées des images sur la base canonique, donc la matrice :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix}$$

(d) Comme la matrice de ϕ est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale.

Donc ϕ a $p+1$ valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } \phi \text{ sont : } 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p+1} \text{ et } \phi \text{ est diagonalisable.}}$

2. **Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ**

(a) On voit sur la matrice que e_0 est vecteur popre associé à 1.

Comme la forme diagonalisée nous donne la dimension du sous espace propre , 1, on en déduit que (e_0) est uine base de ce sous espace popre.

Conclusion : $\boxed{\text{Le sous espace propre associé à 1 est } \mathrm{Vect}(e_0)}$

Conclusion : $\boxed{\text{les fonctions propres sont } \mathrm{Vect}(e_0) \setminus \{0\}}$

(b) On considère une valeur propre λ de ϕ et une fonction polynôme propre associée P.

On a alors $\phi(P) = \lambda P$ et $\phi(P)(x) = \lambda P(x)$ soit pour $x \neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt &= \lambda P(x) \text{ et} \\ \int_1^x P(t)\,dt &= \lambda(x-1)P(x)\end{aligned}$$

qui est également vraie pour $x = 1$.

Donc, en dérivant (intégrale fonction de la borne supérieure)

$$P(x) = \lambda(x-1)P'(x) + \lambda P(x) \text{ et donc}$$

Conclusion : $\boxed{(1-\lambda)P(x) = \lambda(x-1)P'(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

Qui donne pour $x = 1$: $(1-\lambda)P(1) = 0$ et $P(1) = 0$ si $\lambda \neq 1$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } P \text{ fonction propre associé à } \lambda \neq 1, 1 \text{ est racine de } P.}$

(c) On calcule pour $x \neq 1$:
(il serait très maladroit de développer $(t-1)^k$ pour le primitiver)

$$\begin{aligned}\int_1^x P_k(t)\,dt &= \int_1^x (t-1)^k\,dt = dt = \left[\frac{1}{k+1}(t-1)^{k+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{k+1}(x-1)^{k+1}\end{aligned}$$

donc $\phi(P_k)(x) = \frac{1}{k+1}P_k(x)$ et par continuité, ceci est encore valable en 0.

Conclusion : $\boxed{\phi(P_k) = \frac{1}{k+1}P_k}$

Donc la famille $(P_0, P_l, \ldots, P_p)$ est (au choix)
– une famille de fonctions propre associé à des valeurs porpes distinctes, donc libre.
– comme P_k est de dgré k, la famille est échelonnée donc libre.
de $p+1$ vecteurs, dans $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$.

Conclusion : $\boxed{(P_0, P_l, \ldots, P_p) \text{ est une base -de vecteurs propres- de } \mathbb{R}_p[X]\ .}$

(d) On considère une fonction polynôme P exprimée comme suit dans la base précédente :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_pP_p$$

Comme les vecteurs propres non associé à 1 s'annulent en 1 alors $P(1) = a_0P_0(1) = a_0$

Conclusion : $\boxed{a_0 = P(1)}$

On a

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \phi(P) \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k\phi(P_k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k\frac{1}{k+1}P_k\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \phi(\phi(P)) = \phi(\Phi_1) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k\frac{1}{(k+1)^2}P_k\end{aligned}$$

et (par récurrence)

Conclusion : $\boxed{\Phi_n = \sum_{k=0}^{p} a_k\frac{1}{(k+1)^n}P_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

On a alors, pour $k \geq 1$: $|k+1| > 1$ et $\frac{1}{(k+1)^n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Donc dans la somme $\Phi_n(x)$, seul le terme $a_0\frac{1}{1^n}P_0(x) = a_0$ ne tend pas vers 0.

Conclusion : $\boxed{\Phi_n(x) \to a_0 \text{ quand } n \to +\infty}$

Et comme $a_0 = P(1)$, pour $P(x) = x^p$ on a $a_0 = P(1) = 1$

Conclusion : $\boxed{\text{si } P(x) = x^p \text{ alors } \Phi_n(x) \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. **Application à une marche aléatoire**
Un individu se déplace sur les points d'abscisse 0, 1, 2, p selon les règles suivantes :
• il est au point d'abscisse p à l'instant 0.
• il est au point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant p)$ à l'instant n $(n \in \mathbb{N})$, il est de façon équiprobable en l'un des $k+1$ points d'abscisses $0, 1, \ldots, k$ à l'instant $n+1$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$, son espérance.

(a) Comme $(X_n = 0, X_n = 1, , \ldots, X_n = p)$ est un système complet d'événements,

$$\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{P}(X_n = i)\, \mathrm{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$$

On intèrpète le conditionnement :
Quand $X_n = i$, les abscisses de 0 à i sont équiprobables et ont donc une probabilité de $\frac{1}{i+1}$.
Les autres sont de probabilité nulle.
Donc, si $i \geq k$ on a $\mathrm{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{i+1}$ et si $i < k$ on a $\mathrm{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0$.
Et dansla somme, il ne reste donc que :

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=k}^{p} \frac{1}{i+1} \mathrm{P}(X_n = i)}$

(b) On a donc

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = 1) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\mathrm{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = 1) + \cdots + \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_n = p) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(X_n = 1) + \cdots + \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_n = p) \\ \vdots \\ \frac{1}{p+1}\mathrm{P}(X_{n+1} = p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{p+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_n = 0) \\ \mathrm{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(X_n = p) \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) \text{ vérifie } U_{n+1} = MU_n}$

(c) On calcule :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{p+1} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & \frac{0+1+\ldots p}{p+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \ldots & \frac{p(p+1)}{(p+1)2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{matrix}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix}}$.

On a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} U_n = (0\mathrm{P}(X_n = 0) + \cdots + p\mathrm{P}(X_n = p)) = (E(X_n))$
Et comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} MU_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} U_n$
on a donc

(d) *Conclusion :* $\boxed{E(X_{n+1}) = \frac{1}{2} E(X_n)}$

suite géométrique de premier terme $E(X_0) = p$ (car il est en p à l'instant 0)

Conclusion : $\boxed{E(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n p \text{ et } E(X_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$

car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

(e) On a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et comme la suiet U est géométrique matricielle on a

Conclusion : $\boxed{U_n = M^n U_0}$

Pour utiliser 2.d, on ne fait pas le classique changement de base, mais on introduit un polynôme en relation avec U_n :
$Q_n = \mathrm{P}(X_n = 0) \cdot 1 + \cdots + \mathrm{P}(X_n = p) X^p$ qui a pour coordonnées U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

La relation $U_n = M^n U_0$ se traduit alors sur les vecteurs par $Q_n = \phi^n(Q_0) = \phi^n(X^p)$
Et comme $\phi^n(X^p)(x) \to 1$ pour tout x, on a en particulier pour $x = 0$
$\mathrm{P}(X_n = 0) = Q_n(0) = \phi^n(X^p)(0) \to 1$ quand $n \to +\infty$.
La somme des probabliités de la oi valant 1 et étant positives on a alors $\mathrm{P}(X_n = k) \to 0$ pour $k \geq 1$
($\sum P(X_n = k) = 1$ donc $0 \leq \mathrm{P}(X_n = k) = 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) - \cdots \leq 1 - \mathrm{P}(X_n = 0) \to 0$ et par encadrement $\mathrm{P}(X_n = k) \to 0$)

Conclusion : les $p+1$ composantes de U_n ont pour limites (de haut en bas) 1, 0, 0, ... , 0 quand n tend vers +

Interprètation : La probabilité que le point échappe à l'oroigine est nulle, à long terme.

<u>Problème</u> : Essec II 2013 L'objet du problème est l'étude de la concentration un un type de bactéries d'un bassin destiné à la baignade.
un municipalité doit effectuer un prélèvement et l'analyser afin de décider d'autoriser ou non l'utilisation du bassin.
Dans une première partie, on étudiera des propriétés reliant la loi binomiale et la loi de Poisson. Dans une deuxième partie, on regardera la modélisation de la concentration en bactéries du bassin. Enfin, la troisième partie étudiera le principe d'un test destiné à prendre une décision d'utilisation.
Les trois parties peuvent être traitées indépendamment en admettant les résultats des parties précédentes.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Si elles existent, on note $E(T)$ et $V(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.

I Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

1. Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ indépendantes et suivant une loi de Bernouilli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$.

   (a) S_n est une somme de n variables de Bernouilli indépendantes et de même paramètre p_n, donc elle suit la loi binomiale de de paramètres n et p_n :

   $$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$$

   (b) Soit k un entier naturel.

   i. On a

   $$\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k}$$

   ii. Par hypothèses $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$, alors par quotient de limites

   $$p_n = \frac{np_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   ATTENTION : $(1 - p_n)^n$ donne donc en l'infini une forme 1^∞, qui est indéterminée. On écrit :

   $$(1 - p_n)^n = e^{n \ln(1 - p_n)}$$

   Or $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc on peut utiliser le DL de $\ln(1 + u) = u + o(u)$ qui donne :

   $$(1 - p_n)^n = e^{n[-p_n + o(p_n)]} = e^{-np_n + o(np_n)}$$

   Enfin $np_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$ donc $o(np_n) = o(\lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et enfin par continuité de l'exponentielle :

   $$(1 - p_n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda}$$

iii. On a vu que pour tout $n \geqslant k$ (suffisant ici puisque n tend vers $+\infty$ et k est fixé :

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}(p_n)^k(1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{(1-p_n)^k} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p_n^k \times (1-p_n)^n$$

On connaît les limites de $\frac{1}{(1-p_n)^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-0)^k} = 0$ et $(1-p_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$ et $k!$ est une constante, on considère les autres facteurs :

$$\frac{n!}{(n-k)!} \times p_n^k = n(n-1) \times \cdots \times (n-(k-1))p_n^k$$

Or on sait que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$, on va donc le faire apparaître :

$$\frac{n!}{(n-k)!} \times p_n^k = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-(k-1))}{n^k} \times (np_n)^k$$

Ici on a fait apparaître $(np_n)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda^k$, il reste à considérer : (et d'après le résultat de l'énoncé, on doit trouver une limite égale à 1 ce qu'on va s'efforcer d'obtenir) :

$$\frac{n(n-1) \times (n-(k-1))}{n^k} = \frac{(n-1) \times \cdots \times}{n^{k-1}} = \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n}$$

et on a un produit de $(k-1)$ facteurs qui tendent tous vers 1 donc sa limite est $1^{k-1} = 1$ (k est ici fixé, ce n'est pas un produit infini !).

Enfin en rassemblant tous nos résultats on a :

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n} \times (np_n)^k \times (1-p_n)^n \times \frac{1}{k!} \times \frac{1}{(1-p_n)^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

par produit de limites.

(c) On pose $N_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

i. Chaque X_i peut prendre les valeurs 0 ou 1, donc leur maximum peut prendre ces deux valeurs :

$$N_n(\Omega) = \{0; 1\}$$

ii. Calculons déjà $\mathrm{P}(N_n = 0)$: pour avoir $(N_n) = 0$, il faut et il suffit que chacune des variables X_i soit égale à 0 donc :

$$(N_n = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)$$

et par indépendance des X_i :

$$\mathrm{P}(N_n = 0) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_k = 0) = \prod_{k=1}^{n} (1-p_n) = (1-p_n)^n$$

On a vu que cette quantité avait pour limite $e^{-\lambda}$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(N_n = 0) = e^{-\lambda}$$

iii. On en déduit que

$$\mathrm{P}(N_n = 1) = 1 - \mathrm{P}(N_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-\lambda}$$

puis que la suite (N_n) converge en loi vers une variable aléatoire N qui suit la loi de Bernouilli de paramètre $\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

2. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leqslant n$. On considère U une variable aléatoire de loi de Bernouilli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On a donc $\mathrm{P}(U = 1) = \frac{\lambda}{n}$, $\mathrm{P}(U = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n}$ et pour tout i entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathrm{P}(U = i) = 0$.

(a) On pose la fonction $f : u \mapsto 1 - u - e^{-u}$ sur $\mathbb{R}_+$, qui est dérivable comme somme et composée de fonctions usuelles dérivables et :

$$f'(u) = -1 + e^{-u} \leqslant 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \quad \text{car } -u \leqslant 0 \Longrightarrow e^{-u} \leqslant 1 \text{ par croissance de l'exponentielle}$$

f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et atteint un maximum en $u = 0$, qui vaut $f(0) = 1 - 0 - e^0 = 0$ et :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad f(u) \leqslant f(0) = 0 \Longleftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}_+, \quad 1 - u \leqslant e^{-u}$$

(b) U suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, on remplace donc par les valeurs :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k \tfrac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = \left| \mathrm{P}(U = 0) - \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^0 \tfrac{1}{0!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \left| \mathrm{P}(U = 1) - \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^1 \tfrac{1}{1!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k \tfrac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|$$

On a vu que pour tout $u \geqslant 0$ (ici $u = \frac{\lambda}{n}$), $1 - u - e^{-u} \leqslant 0$ donc la première valeur absolue vaut l'opposé du nombre à l'intérieur.

D'autre part la deuxième vaut $\frac{\lambda}{n} \left| 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|$ et comme $1 - e^{-u} = -f'(u) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ alors toujours en $u = \frac{\lambda}{n}$ la valeur absolue vaut ce nombre.

Enfin à l'intérieur de la somme tous les nombres sont négatifs donc leur valeur absolue est encore une fois leur opposé.

Donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = -1 + \frac{\lambda}{n} + e^{-\frac{\lambda}{n}} + \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

Dans la dernière somme , on sort le facteur constant $e^{-\frac{\lambda}{n}}$ puis on reconnaît une série exponentielle dont on rajoute les deux premiers termes manquants :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = -1 + 2\frac{\lambda}{n} + e^{-\frac{\lambda}{n}} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} + e^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!} - 1 - \frac{\lambda}{n} \right)$$

Enfin cette série exponentielle est convergente et sa somme vaut $e^{\frac{\lambda}{n}}$, puis on simplifie :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = -1 + 2\frac{\lambda}{n} + e^{-\frac{\lambda}{n}} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} + e^{-\frac{\lambda}{n}} \left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1 - \frac{\lambda}{n} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = -1 + 2\frac{\lambda}{n} + e^{-\frac{\lambda}{n}} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} + 1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}$$

On élimine les termes qui se compensent et on factorise par $2\frac{\lambda}{n}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| = \frac{2\lambda}{n} \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right]$$

(c) On applique à nouveau la question a) : on isole d'abord $1 - e^{-u}$ dans l'inégalité du a) :

$$1 - u \leqslant e^{-u} \Longleftrightarrow 1 - e^{-u} \leqslant u$$

qu'on applique à $u = \frac{\lambda}{n}$, ce qui donne :

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \leqslant \frac{\lambda}{n}$$

et enfin on multiplie par $\frac{2\lambda}{n} \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \leqslant 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

3. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0 < \lambda \leqslant n$. Soient Z, u et V trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et que V suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On observe en particulier que pour tout entier p strictement négatif

$$\mathrm{P}(Z = p) = \mathrm{P}(U = p) = \mathrm{P}(V = p) = 0.$$

(a) L'inégalité triangulaire donne pour tous a et b réels :

$$|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |(-b)| = |a| + |b|$$

On l'applique ici avec $a = \mathrm{P}(U = k - i)$ et $b = \mathrm{P}(V = k - i)$ et comme une probabilité est toujours positive on obtient :

$$0 \leqslant |\ \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i)\ | \leqslant |\ \mathrm{P}(U = k-i)| + |\mathrm{P}(V = k-i)\ | = \mathrm{P}(U = k-i) + \mathrm{P}(V = k-i)$$

On veut prouver la convergence d'une série sans obtenir sa somme, on passe par un théorème de comparaison et les hypothèses obtenues nous font utiliser une majoration.

Les séries de termes généraux $\mathrm{P}(U = k - i)$ et $\mathrm{P}(V = k - i)$ convergent car une fois enlevé les termes négatifs (qui valent 0), on a la somme des probabilités de chacune de ces variables aléatoires, qui converge vers 1.

On obtient donc la convergence de la série majorante (et même sa somme égale à 2, ce qui ne nous intéresse pas) donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général

$$|\ \mathrm{P}(U = k - i) - \mathrm{P}(V = k - i)\ |$$

converge.

On note A_i sa somme : $A_i = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\ \mathrm{P}(U = k - i) - \mathrm{P}(V = k - i)\ |$.

On remarque la ressemblance avec le résultat de la question 2)c), on va donc utiliser celui-ci. On commence par réindexer la somme avec $k' = k - i$:

$$A_i = \sum_{k=-i}^{+\infty} |\ \mathrm{P}(U = k) - \mathrm{P}(V = k)\ |$$

et comme les variables U et V ont des probabilités nulles d'être négatives,

$$A_i = \sum_{k=0}^{+\infty} |\ \mathrm{P}(U = k) - \mathrm{P}(V = k)\ |$$

Enfin comme dans la question 2 U suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, et V suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, on remplace par la valeur de ses probabilités :

$$A_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \mathrm{P}(U = k) - e^{-\frac{\lambda}{n}} \frac{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k}{k!} \right|$$

qui est exactement la série qui a été majorée à la question 2. Donc on obtient bien :

$$A_i \leqslant 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

(b) A nouveau on utilise un théorème de comparaison, en utilisant la série convergente liée à la variable Z (attention à ne pas vouloir utiliser une série de Riemann, car c'est i et pas n qui varie).

Comme $0 < \lambda \leqslant n$,

$$A_i \times \mathrm{P}(Z = i) \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \times \mathrm{P}(Z = i)$$

avec $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathrm{P}(Z = i)$ qui converge vers $2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$ (voir question précédente).

Dans les deux cas, le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure à la convergence de la série de terme général $A_i \times \mathrm{P}(Z = i)$.

(c) Cette fois-ci k est fixé et c'est i qui tend vers $+\infty$: alors pour tout $i \geqslant k+1$, les probabilités $\mathrm{P}(U = k-i)$ et $\mathrm{P}(V = k-i)$ sont nulles donc

$$\forall i \geqslant k+1, \quad \mid \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i) = 0$$

et la série converge (c'est une somme finie).

(d) On pose $B_k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \mid \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i)$.

i. On a vu que tous les termes pour $i \geqslant k+1$ sont nuls, on sépare alors les termes $i = k-1$ et $i = k$ qu'on calcule à part :

$$\mid \mathrm{P}(U = 0) - \mathrm{P}(V = 0) \mid \times \mathrm{P}(Z = k) = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k)$$

et

$$\mid \mathrm{P}(U = 1) - \mathrm{P}(V = 1) \mid \times \mathrm{P}(Z = k-1) = \left|\frac{\lambda}{n} - \lambda e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k-1)$$

donc

$$B_k = \sum_{i=0}^{k} \mid \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i)$$

$$B_k = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k) + \left|\frac{\lambda}{n} - \lambda e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} \mid \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i)$$

Enfin pour $i \leqslant k-2$, $k-i \geqslant 2$ donc $\mathrm{P}(U = k-i) = 0$ (rappelons que $U(\Omega) = \{0; 1\}$.

Donc $\forall k \in [\![0; k-2]\!]$,

$\mid \mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i) = \mid -\mathrm{P}(V = k-i) \mid \times \mathrm{P}(Z = i) = \mathrm{P}(V = k-i) \times \mathrm{P}(Z = i)$

car une probabilité est toujours positive. Enfin on obtient :

$$B_k = \left|1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k) + \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} \mathrm{P}(V = k-i)\, \mathrm{P}(Z = i)$$

ii. On reconnaît la loi d'une somme de variables aléatoires, on va alors utiliser les probabilités totales avec le système complet d'évènement $(Z = i)_{i \geqslant 0}$:

$$\mathrm{P}(V + Z = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left([V + Z = k] \cap [Z = i]\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left([V = k-i] \cap [Z = i]\right)$$

De plus les variables aléatoires sont indépendantes, et on va séparer les termes cherchés :

$$\mathrm{P}(V + Z = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(V = k-i)\, \mathrm{P}(Z = i) = \sum_{i=0}^{k-2} \mathrm{P}(V = k-i)\, \mathrm{P}(Z = i) + \sum_{i=k-1}^{+\infty} \mathrm{P}(V = k-i)\, \mathrm{P}(Z = i)$$

Enfin cette dernière somme est positive ou nulle comme somme de termes positifs ou nuls donc :

$$\mathrm{P}(V + Z = k) \geqslant \sum_{i=0}^{k-2} \mathrm{P}(V = k-i)\, \mathrm{P}(Z = i)$$

iii. On obtient la majoration suivante de B_k :

$$B_k \leqslant \left|1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k) + \left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| \mathrm{P}(Z = k-1) + \mathrm{P}(V + Z = k)$$

Remarquons que tous les facteurs devant les probabilités sont constants (seul k est variable ici) donc on obtient une combinaison linéaire de trois séries convergentes car chacune est la somme des probabilités d'une certaine variable aléatoire (Z, Z puis $V + Z$).

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs (B_k est la somme d'une série à termes positifs donc c'est bien un nombre positif), la série de terme général B_k converge.

On admettra alors qu'on a : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} B_k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i \times \mathrm{P}(Z = i)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i)| \times \mathrm{P}(Z = i)\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i)|\right) \times \mathrm{P}(Z = i)$$

4. On conserve dans cette question les notations et les hypothèses de la question 3 concernant les variables aléatoires Z, U et V.

   (a) On procède comme précédemment ; on utilise l'inégalité triangulaire pour majorer le terme général, et on reconnaît des séries convergentes :

   $$|\ \mathrm{P}(Z+U = k) - \mathrm{P}(Z+V = k)\ | \leqslant |\,\mathrm{P}(Z+U = k)| + |\,\mathrm{P}(Z+V = k)| = \mathrm{P}(Z+U = k) + \mathrm{P}(Z+V = k)$$

   qui est la somme des termes généraux de deux séries convergentes, toujours pour les mêmes raisons (sommes des probabilités des variables aléatoires $U + Z$ et $V + Z$).

   Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général

   $$|\ \mathrm{P}(Z + U = k) - \mathrm{P}(Z + V = k)\ |$$

   est convergente.

   (b) On applique les probabilités totales avec le système complet d'évènement $(Z = i)_{i \geqslant 0}$:

   $$|\ \mathrm{P}(Z+U = k) - \mathrm{P}(Z+V = k)\ | = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left([Z + U = k] \cap [Z = i]\right) - \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left([Z + V = k] \cap [Z = i]\right)\right|$$

   On rassemble les deux séries convergentes et on simplifie les probabilités :

   $$|\,\mathrm{P}(Z + U = k) - \mathrm{P}(Z + V = k)| = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} \left[\mathrm{P}\left([U = k-i] \cap [Z = i]\right) - \mathrm{P}\left([V = k-i] \cap [Z = i]\right)\right]\right|$$

   Les variables U et Z d'une part et V et Z d'autre part sont indépendantes, on obtient :

   $$|\,\mathrm{P}(Z + U = k) - \mathrm{P}(Z + V = k)| = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} [\mathrm{P}(U = k-i)\,\mathrm{P}(Z = i) - \mathrm{P}(V = k-i)\,\mathrm{P}(Z = i)]\right|$$

   Enfin en factorisant par $\mathrm{P}(Z = i)$ et par inégalité triangulaire on obtient :

   $$|\,\mathrm{P}(Z + U = k) - \mathrm{P}(Z + V = k)| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} |\mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i)| \times \mathrm{P}(Z = i)$$

   Enfin on somme pour k allant de 0 à $+\infty$ (les deux séries sont bien convergentes donc on peut le faire) :

   $$\sum_{k=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(Z + U = k) - \mathrm{P}(Z + V = k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(U = k-i) - \mathrm{P}(V = k-i)| \times \mathrm{P}(Z = i)$$

et enfin puisqu'on a admis que l'échange de l'ordre des sommes était licite, on obtient bien le résultat demandé.

Enfin on remarque que cette somme s'écrit encore :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(Z+U=k)-\mathrm{P}(Z+V=k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} A_i\,\mathrm{P}(Z=i)$$

et on a vu que $A_i \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$ donc en multipliant par $\mathrm{P}(Z=i)$ et en sommant pour i allant de 0 à $+\infty$ avec deux séries qui convergent bien :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\,\mathrm{P}(Z+U=k)-\mathrm{P}(Z+V=k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} A_i\,\mathrm{P}(Z=i) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathrm{P}(Z=i) = 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

puisque $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z=i)=1$.

5. Soient $U_1,\ldots,U_n,V_1,\ldots,V_n$ $2n$ variables aléatoires indépendantes telles que pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant b$, U_i suit une loi de Bernouilli de paramètre $\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et V_i suit une loi de Poisson de paramètre $\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

   (a) On va utiliser astucieusement l'inégalité triangulaire : on fait d'abord apparaître tous les nouveaux termes à l'intérieur de la valeur absolue :

$$\begin{gathered}
|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ | = \\
|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)+ \\
\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k)+ \\
\cdots+\ \mathrm{P}(U_1+V_2+\cdots+V_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ |
\end{gathered}$$

   et l'inégalité triangulaire donne alors :

$$\begin{gathered}
|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ | \leqslant \\
|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)\ |+ \\
|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k)\ |+ \\
\cdots+|\ \mathrm{P}(U_1+V_2+\cdots+V_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ |
\end{gathered}$$

   (b) On en déduit immédiatement (sous réserve de convergence des séries du membre de droite) que :

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{\infty}|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ | \leqslant \\
\sum_{k=0}^{\infty}|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)\ |+ \\
\sum_{k=0}^{\infty}|\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-1}+V_n=k)-\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_{n-2}+V_{n-1}+V_n=k)\ |+ \\
\cdots+\sum_{k=0}^{\infty}|\ \mathrm{P}(U_1+V_2+\cdots+V_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ |
\end{gathered}$$

   On remarque qu'à chaque fois une seule variable aléatoire diffère (U_n et V_n dans la première somme, U_{n-1} et V_{n-1} dans la seconde, etc...).

   On pose alors à chaque fois Z_j la variable restante (égale des deux côtés) : $Z_n = U_1+\cdots+U_{n-1}$ dans la première somme, $Z_{n-1} = U_1+\cdots+U_{n-2}+V_n$ dans la seconde, etc... jusqu'à $Z_1 = V_2+\cdots+V_n$ dans la dernière somme (la n-ème).

(Remarquer qu'on a numéroté Z avec le même numéro que la variable qui change) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ | \leqslant \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} |\ \mathrm{P}(U_j+Z_j=k)-\mathrm{P}(V_j+Z_j=k)\ |\right]$$

On reconnaît alors dans chacune de ses sommes le résultat de la question 4 (toutes les hypothèses sont vérifiées avec $Z_j(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $U_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et $V_j \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et ces trois variables indépendantes car Z_j ne dépend que des variables d'indice autre que j, qui sont indépendantes de U_j et V_j).

On en déduit que ces sommes converge bien (ce qui justifie l'écriture de départ) puis en appliquant à chacune la question 4 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\ \mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)-\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)\ | \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{2\lambda^2}{n^2}=\frac{2\lambda^2}{n}$$

(c) La somme $\sum\limits_{j=1}^{n} U_j$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ comme somme de variables de Bernouilli indépendantes et de même paramètre.

De même la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} V_j$ suit la loi de Poisson de paramètres $n\times\frac{\lambda}{n}=\lambda$ comme somme de variables indépendantes suivant des lois de Poisson.

On a alors $\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(U_1+\cdots+U_n=k)$ pour tout k, et $\mathrm{P}(V_1+\cdots+V_n=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout k donc en remplaçant dans l'inégalité de 5)b) on obtient bien :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\mathrm{P}(X=k)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leqslant \frac{2\lambda^2}{n}$$

II Modélisation de la concentration en bactéries

Le bassin qu'on étudie est supposé de volume V (en m^3) et on effectue un prélèvement de volume ΔV (en m^3). Dans cette situation, la probabilité pour qu'une bactérie spécifique du bassin se trouve dans le prélèvement est égale à $\frac{\Delta V}{V}$.
Supposons que le bassin contienne n bactéries numérotées de 1 à n ($n\in\mathbb{N}^*$). On considère alors n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots X_n$ à valeurs 0 ou 1 telles que $X_i=1$ si la bactérie i se trouve dans le prélèvement et 0 sinon. Les variables en question sont supposées indépendantes.

On pose $c=\frac{n}{V}$ qui représente la concentration en bactéries du bassin par m^3.

6. (a) X_i suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{\Delta V}{V}$ (la probabilité que la bactérie soit dans le prélèvement).

   (b) On a clairement $N=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et comme ces variables de Bernouilli sont indépendantes et de même paramètre, N suit la loi binomiale de paramètre n et $\frac{\Delta V}{V}$.

7. On remarque tout d'abord que pour tout entier k on peut obtenir F comme suit :
   - Si $k<0$, $F(k)=0$.
   - Si $k=0$, $F(k)=\mathrm{P}(U=0)=e^{-\lambda}$.
   - Si $k\geqslant 1$, $F(k)=F(k-1)+\mathrm{P}(U=k-1)$.

   On va donc calculer $F(k)$ par récurrence, et de plus la probabilité $\mathrm{P}(U=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ vérifie :

$$\mathrm{P}(U=k)=\frac{\lambda}{k}\mathrm{P}(U=k-1)$$

   ce qui va permettre de calculer $\mathrm{P}(U=k)$ par récurrence également.

   Pour minimiser le nombre d'opérations on va calculer ces termes récurrents en même temps.

Enfin pour un x réel, on remarque que $F(x) = F\lfloor x \rfloor$ ce qui permet de se ramener à un entier.

On peut alors écrire :

```
function F=fct-rep-Poisson(x,lambda)
n=floor(x)
 if (x < 0) then
    F=0
else
   F=0
   for k=0:n do
        F=F+exp(-lambda)*lambda^k/fact(k)
   end
end
endfunction
```

8. Soit U une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $c\Delta V$. Soit $K \in \mathbb{N}^*$ fixé.

   (a) On applique la question 5)c) de la partie I avec N qui suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ et posant $\lambda = \frac{n\Delta V}{V} = c\Delta V$, puis U qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = c\Delta V$, et N et U qui sont indépendantes.

   On obtient :
$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{P}(N = k) - \mathrm{P}(U = k)| \leqslant \frac{2\lambda^2}{n} = \frac{2c^2(\Delta V)^2}{n}$$

   On en déduit (tous les termes de la somme sont positifs) que :
$$\sum_{k=0}^{K} |\mathrm{P}(N = k) - \mathrm{P}(U = k)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{P}(N = k) - \mathrm{P}(U = k)| \leqslant \frac{2c^2(\Delta V)^2}{n}$$

   Or par inégalité triangulaire la somme de gauche vérifie :
$$\sum_{k=0}^{K} |\mathrm{P}(N = k) - \mathrm{P}(U = k)| \geqslant \left| \sum_{k=0}^{K} \mathrm{P}(N = k) - \mathrm{P}(U = k) \right| = |\mathrm{P}(N \leqslant K) - \mathrm{P}(U \leqslant K)|$$

   En rassemblant et en remarquant que $\frac{c}{n} = \frac{1}{V}$ on obtient :
$$|\ \mathrm{P}(N \leqslant K) - \mathrm{P}(U \leqslant K)\ | \leqslant \frac{2c^2(\Delta V)^2}{n} = \frac{2c(\Delta V)^2}{V}$$

   (b) Dans cette application numérique, on obtient en posant E l'erreur commise :
$$E = |\ \mathrm{P}(N \leqslant K) - \mathrm{P}(U \leqslant K)\ | \leqslant \frac{2c(\Delta V)^2}{V} = \frac{2c(10^{-3})^2}{10^3} = \frac{2c}{10^9}$$

   (c) On a toujours :
$$E \leqslant \frac{2c(\Delta V)^2}{V} \leqslant \frac{2 \times 10^6 (10^{-3})^2}{V} = \frac{2}{V}$$

   donc pour garantir $E \leqslant 10^{-6}$ il faut :
$$E \leqslant \frac{2}{V} \leqslant 10^{-6} \Longleftrightarrow V \geqslant 2 \times 10^6$$

   c'est-à-dire qu'il faut un volume supérieur à 2 000 000 m^3.

   On <u>admettra</u> que le résultat de la question 5.c) peut être amélioré de la façon suivante :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \mathrm{P}(X = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leqslant \frac{2\lambda \min(\lambda, 2)}{n}$$

(d) En effectuant les mêmes opérations que précédemment on obtient :

$$\mid \mathrm{P}(N \leqslant K) - \mathrm{P}(U \leqslant K) \mid \leqslant \frac{2(c\Delta V)\min(c\Delta V, 2)}{n}$$

puis on remplace $\frac{c}{n} = \frac{1}{V}$ et on remarque que $\min(c\Delta V, 2) \leqslant 2$ donc on a :

$$\mid \mathrm{P}(N \leqslant K) - \mathrm{P}(U \leqslant K) \mid \leqslant \frac{2\Delta V \min(c\Delta V, 2)}{V} \leqslant 4\frac{\Delta V}{V}$$

(e) On obtient

$$E \leqslant 4\frac{\Delta V}{V} = \frac{4 \times 10^{-3}}{V}$$

donc pour garantir que $E \leqslant 10^{-6}$ il faut que :

$$\frac{4 \times 10^{-3}}{V} \leqslant 10^{-6} \Longleftrightarrow V \geqslant 410^3$$

donc il faut un volume supérieur à 4000 m^3.

III Construction d'une procédure de test

Un prélèvement est réalisé et mis en culture pendant 24 heures. Les bactéries se multiplient et on obtient ainsi une concentration plus importante et plus facile à estimer. On conserve les notations de la partie précédente et on posera $\lambda = c\Delta V$. EN outre, on définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (1+x)\ln(1+x) - x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

9. Sur cet intervalle, h est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et :

$$h'(x) = 1 \times \ln(1+x) + (1+x) \times \frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x)$$

et on résout avec l'exponentielle strictement croissante :

$$\ln(1+x) > 0 \Longleftrightarrow 1 + x > e^0 = 1 \Longleftrightarrow x > 0$$

qui va donner le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$h(x)$	‖	↘	0	↗	‖
$h(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖

10. On écrit la définition de $E(Y)$ et on sépare en deux sommes selon que les valeurs soient avant ou après α :

$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,\mathrm{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega), y < \alpha} y\,\mathrm{P}(Y = y) + \sum_{y \in Y(\Omega), y \geqslant \alpha} y\,\mathrm{P}(Y = y)$$

La première somme est positive car Y est à valeurs positives et les probabilités sont toujours positives.

Dans la deuxième, on a $y \geqslant \alpha$ donc on peut majorer :

$$E(Y) \geqslant 0 + \sum_{y \in Y(\Omega), y \geqslant \alpha} \alpha\,\mathrm{P}(Y = y) = \alpha \sum_{y \in Y(\Omega), y \geqslant \alpha} \mathrm{P}(Y = y) = \alpha\,\mathrm{P}(Y \geqslant \alpha)$$

et on obtient bien :

$$E(Y) \geqslant \alpha\,\mathrm{P}(Y \geqslant \alpha) \Longleftrightarrow \mathrm{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(Y)}{\alpha}$$

11. Soit λ un réel strictement positif et soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit ε un réel strictement positif.

(a) D'après le théorème de transfert on a sous réserve de convergence :

$$E(e^{uX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{uk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^u)^k}{k!}$$

On reconnaît une série exponentielle qui converge, e^{uX} admet donc une espérance et :

$$E(e^{uX}) = e^{-\lambda} \times e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u - 1)}$$

(b) On calcule le côté gauche :

$$E\left(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}\right) = E\left(e^{u_0 X} \times e^{-u_0\lambda(1+\varepsilon)}\right)$$

et comme $e^{-u_0\lambda(1+\varepsilon)}$ est une constante la linéarité de l'espérance donne :

$$E\left(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}\right) = e^{-u_0\lambda(1+\varepsilon)} E(e^{u_0 X}) = e^{-u_0\lambda(1+\varepsilon)} \times e^{\lambda(e^{u_0}-1)} = e^{\lambda(e^{u_0}-1-u_0-u_0\varepsilon)}$$

Il faut donc obtenir

$$h(\varepsilon) = (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) - \varepsilon = 1 + u_0 + u_0\varepsilon - e^{u_0} \iff (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon + u_0(1+\varepsilon) - e^{u_0}$$
$$\iff (1+\varepsilon)\left[\ln(1+\varepsilon) - 1\right] = u_0(1+\varepsilon) - e^{u_0}$$

On étudie alors la fonction $f(u) = u(1+\varepsilon) - e^u - (1+\varepsilon)\left[\ln(1+\varepsilon) - 1\right]$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie :

$$f'(u) = (1+\varepsilon) - e^u$$

qui est décroissante et s'annule en $u = \ln(1+\varepsilon)$ donc f' est positive puis négative.

Enfin f est croissante puis décroissante et admet un maximum en $u_1 = \ln(1+\varepsilon)$, qui vaut :

$$f(u_1) = (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) - e^{\ln(1+\varepsilon)} - (1+\varepsilon)\left[\ln(1+\varepsilon) - 1\right] = (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)\left[\ln(1+\varepsilon) - 1\right] = 0$$

On en déduit que f s'annule au point $u_0 = u_1 = \ln(1+\varepsilon)$, et en ce point on a bien :

$$E(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)} = e^{-\lambda h(\varepsilon)}$$

(c) i. Pour tout $u > 0$,

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geqslant \varepsilon) = \mathrm{P}(X - \lambda \geqslant \lambda\varepsilon) = \mathrm{P}(u(X-\lambda) \geqslant u\lambda\varepsilon) = \mathrm{P}\left(e^{u(X-\lambda)} \geqslant e^{\lambda\varepsilon u}\right)$$

ii. La variable aléatoire $e^{u(X-\lambda)}$ est positive et admet une espérance, on lui appliqué l'inégalité de Markov :

$$\mathrm{P}\left(e^{u(X-\lambda)} \geqslant e^{\lambda\varepsilon u}\right) \leqslant \frac{E\left(e^{u(X-\lambda)}\right)}{e^{\lambda\varepsilon u}} = E\left(e^{u(X-\lambda)-\lambda\varepsilon u}\right) = E\left(e^{u(X-\lambda(1+\varepsilon))}\right)$$

donc en reprenant la question précédente on obtient :

$$\forall u > 0, \quad \mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geqslant \varepsilon) \leqslant E\left(e^{u(X-\lambda(1+\varepsilon))}\right)$$

En particulier, c'est vrai pour $u = u_0$ qui est bien strictement positif donc :

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \geqslant \varepsilon) \leqslant E\left(e^{u_0(X-\lambda(1+\varepsilon))}\right) = e^{-\lambda h(\varepsilon)}$$

(d) – Premier cas : $\varepsilon \geqslant 1$, on a alors $-\varepsilon \leqslant -1$ donc :

$$h(-\varepsilon) = 0 \quad \text{donc} \quad e - \lambda h(-\varepsilon) = e^0 = 1$$

et comme une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1, l'inégalité est bien vérifiée.

– Deuxième cas : $0 < \varepsilon < 1$: On reprend les questions précédentes, avec quelques changements :

Comme il faut changer le sens de l'inégalité pour utiliser Markov, on utilise cette fois-ci $u < 0$: Pour tout $u > 0$,

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leqslant -\varepsilon) = \mathrm{P}(X-\lambda \leqslant -\varepsilon\lambda) = \mathrm{P}(u(X-\lambda) \geqslant -u\varepsilon\lambda) = \mathrm{P}\left(e^{u(X-\lambda)} \geqslant e^{-u\varepsilon\lambda}\right)$$

On applique à nouveau l'inégalité de Markov et on obtient :

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leqslant -\varepsilon) = \mathrm{P}\left(e^{u(X-\lambda)} \geqslant e^{-u\varepsilon\lambda}\right) \leqslant \frac{E\left(e^{u(X-\lambda)}\right)}{e^{-u\varepsilon\lambda}} = E\left(e^{u(X-\lambda)+u\varepsilon\lambda}\right)$$

On reprend la question 11)b), et on montre qu'il existe $u_1 < 0$ tel que :

$$E\left(e^{u_1(X-\lambda)+u_1\varepsilon\lambda}\right) = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}$$

On se ramène à nouveau à une équation sur u, puis on étudie une fonction et on obtient une unique solution :

$$u_1 = \ln(1-\varepsilon)$$

qui est bien strictement négatif.

L'inégalité précédente étant vraie pour tout $u < 0$, elle est vraie en u_1 et enfin on en déduit :

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leqslant -\varepsilon) \leqslant e^{-\lambda h(-\varepsilon)}$$

On obtient bien pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leqslant -\varepsilon) \leqslant e^{-\lambda h(-\varepsilon)}$$

12. Si la concentration en bactéries est trop élevée, on doit interdire le bassin. La limite maximale de tolérance est fixée à 2000 bactéries par litre. On garde les notations de la question 11 et on suppose de nouveau que $\Delta V = 10^{-3}\mathrm{m}^3$. Fixons un réel α compris entre 0 et 2000.

(a) On transforme :

$$\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = \mathrm{P}(X-\lambda \leqslant \alpha-\lambda) = \mathrm{P}\left(\lambda^{-1}(X-\lambda) \leqslant \lambda^{-1}(\alpha-\lambda)\right)$$

puis on applique la question 11)d) pour $\varepsilon = \lambda^{-1}(\lambda-\alpha)$ qui est bien strictement positif car $\lambda > 2000 \geqslant \alpha$. On obtient :

$$\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) \leqslant e^{-\lambda h(\lambda^{-1}(\alpha-\lambda))} = e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha-1)}.$$

(b) On construit patiemment l'inégalité : on a $\lambda > 2000$ donc :

$$\lambda^{-1} < \frac{1}{2000} \quad \text{puis} \quad \lambda^{-1}\alpha < \frac{\alpha}{2000} \quad \text{puis} \quad \lambda^{-1}\alpha - 1 < \frac{\alpha}{2000} - 1$$

Ces deux réels sont compris entre 0 et 1 (on reconnaît le $-\varepsilon$ de la question précédente à gauche, négatif, et plus grand que -1 car $\lambda^{-1}\alpha > 0$), et à droite $\alpha \leqslant 2000$ donc $\frac{\alpha}{2000} \leqslant 1$.

La fonction h est de plus décroissante sur $]-1;0]$ donc :

$$h\left(\lambda^{-1}\alpha-1\right) > h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right) \quad \text{puis} \quad -\lambda h\left(\lambda^{-1}\alpha-1\right) < -\lambda h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)$$

et enfin par stricte croissance de l'exponentielle :

$$e^{-\lambda h\left(\lambda^{-1}\alpha-1\right)} < e^{-\lambda h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)}$$

On reprend alors l'inégalité sur $\mathrm{P}(X-\alpha)$:

$$\mathrm{P}(X-\alpha) \leqslant e^{-\lambda h\left(\lambda^{-1}\alpha-1\right)} \leqslant e^{-\lambda h\left(\frac{\alpha}{2000}-1\right)}$$

(c) Cette équation est équivalente à :

$$2000h\left(\frac{x}{2000}-1\right)=\ln(100)\iff\left(\frac{x}{2000}-1\right)=\frac{\ln(100)}{2000}$$

On reprend alors l'étude de h et on rajoute les limites (évidente en $+\infty$, avec le changement de variable $y=1+x$ en -1) au tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

Or

$$\frac{\ln(100)}{2000}=\frac{\ln(10^2}{2000}=\frac{2\ln(10)}{2000}=\frac{\ln(10)}{1000}<1$$

donc l'équation $h(y)=\frac{\ln(100)}{2000}$ admet une unique solution $y\in]-1;0]$, et une unique solution $z\in[0;+\infty[$.

De plus on a

$$\frac{x}{2000}-1=y\iff x=2000(y+1)$$

donc l'équation initiale admet deux solutions :

$$\alpha_0=2000(y+1)\in[0;2000]\quad\text{car}\quad y\in[-1;0]\quad\text{et}\quad\alpha_1\in[2000;+\infty[\quad\text{car}\quad z\geqslant 0.$$

Elle admet une unique solution α_0 comprise entre 0 et 2000.

(d) On admet que $1865<\alpha_0$.

Par croissance de la fonction de répartition d'une variable aléatoire, on en déduit si $\lambda>2000$:

$$\mathrm{P}(X<1865)\leqslant\mathrm{P}(X\leqslant 1865)\leqslant\mathrm{P}(X\leqslant\alpha_0)\leqslant e^{-2000h\left(\frac{\alpha_0}{2000}-1\right)}$$

Or α_0 étant solution de l'équation précédente, on a

$$2000h\left(\frac{\alpha_0}{2000}-1\right)=\ln(100)$$

donc

$$\mathrm{P}(X<1865\leqslant e^{-2000h\left(\frac{\alpha_0}{2000}-1\right)}=e^{-\ln(100)}=\frac{1}{100}$$

(e) Rappelons qu'on approxime la loi binomiale du nombre de bactéries dans le prélèvement par la loi de Poisson que suit X.

Avec 1600 bactéries sans le prélèvement, on obtient $X=1600<1865$.

Or on a vu précédemment que $\mathrm{P}_{\lambda>2000}(X<1865)\leqslant\frac{1}{100}$.

Ceci signifie qu'on a un risque très faible d'avoir $\lambda>2000$ (d'autant que 1600 est largement plus petit que 1865, la probabilité est probablement bien plus faible en réalité).

Or la tolérance est fixée à 2000 bactéries par litre, donc 2000×10^3 bactéries par mètre cube, et enfin $\lambda=c\Delta V=2000\times10^3\times10^{-3}=2000$.

On voit donc que le risque que le seuil de tolérance soit dépassé est extrêmement faible, et on peut autoriser le bassin sans prendre de risque (en fait on peut minimiser encore plus ce risque en faisant plusieurs prélèvements et en faisant la synthèse des résultats, c'est la théorie de l'estimation par intervalle de confiance).